第 447 回

問題 1

4 桁の整数で，その下 2 桁の数と上 2 桁の数との和の平方がもとの 4 桁の整数に等しくなるものすべて求めよ。

解答　4 桁の整数を $1000a+100b+10c+d$ （ a は正の整数， b，c，d は非負整数）とおくと，仮定より，

$\{(10c+d)+(10a+b)\}^2=1000a+100b+10c+d$ 　…①

変形すると， $100\{(a+c)^2-10a-b\}+10\{2(a+c)(b+d)-c\}+(b+d)^2-d=0$

$(b+d)^2-d$ は 10 の倍数である。 …②

①より， d は平方数の一位の数であるから， $d=1,\ 4,\ 9,\ 6,\ 5$ 　…③

②より， $d=1$ のとき， $b=0,\ 8$

$d=4$ のとき， $b=0,\ 4$

$d=9$ のとき， $b=4,\ 8$

$d=6$ のとき， $b=0$

$d=5$ のとき， $b=0$

である。

このことから， b は， 0，4，8 である。 …④

①を c について整理すると， $(10c)^2+(20a+2b+2d-1)(10c)+(10a+b+d)^2-(1000a+100b+d)=0$

$10c$ についての 2 次方程式の判別式を D とおくと，

$D=(20a+2b+2d-1)^2-4\{(10a+b+d)^2-(1000a+100b+d)\}=396(10a+b)+1$ 　…⑤

$c>0$ より， $c=\dfrac{-20a-2b-2d+1+\sqrt{396(10a+b)+1}}{20}$

c が整数になるためには，⑤は平方数でなければならない。

[1] $b=0$ のとき， $D=3960a+1$ 　これは $a=2,\ 3$ のとき平方数になる。

$a=2$ のとき， $c=\dfrac{50-2d}{20}$ 　これが整数になるのは，③の中では， $d=5$ 　$\therefore (a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 0,\ 2,\ 5)$

$a=3$ のとき， $c=\dfrac{50-2d}{20}$ 　これが整数になるのは，③の中では， $d=5$ 　$\therefore (a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 0,\ 2,\ 5)$

[2] $b=4$ のとき， $D=396(10a+4)+1$ 　これは， $a=1,\ 2,\ \cdots\cdots\ 9$ に対して平方数にならないから不適。

[3] $b=8$ のとき， $D=396(10a+8)+1$ 　これは $a=9$ のとき平方数になる。

$a=9$ のとき， $c=\dfrac{20-2d}{20}$ 　これが整数になるのは，③の中では， $d=1$ 　$\therefore (a,\ b,\ c,\ d)=(9,\ 8,\ 0,\ 1)$

よって，求める 4 桁の数は， 2025， 3025， 9801 　答

参考

```
90 REM 第447回問題1
100 LET  u=10^3-1
110 LET  u=u+1
120 IF u=10^4 THEN STOP
130 LET  a=INT(u/1000)
140 LET  b=int(u/100)-10*a
150 LET  c=int(u/10)-100*a-10*b
160 LET  d=u-int(u/10)*10
170 IF a=0 THEN GOTO 110
180 IF (10*a+b+10*c+d)^2=1000*a+100*b+10*c+d THEN PRINT a;b;c;d
190 GOTO 110
    END
```

```
2 0 2 5
3 0 2 5
9 8 0 1
```

問題 2

$\sqrt{n^2+1}$ の小数第 1 位が 0 かつ小数第 2 位が 2 となる自然数 n を求めよ。

解答　$n<\sqrt{n^2+1}<n+1$　…①より，$\sqrt{n^2+1}$ の整数部分は n であるから，

小数部分は，$\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

①より，$2n<\sqrt{n^2+1}+n<2n+1$

逆数をとり，不等号の向きを揃えると，$\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\dfrac{1}{2n}$　…②

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ の小数第 1 位が 0，小数第 2 位が 2 であるから，$0.02\leqq\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<0.03$　…③

②，③より，$\dfrac{1}{2n+1}<0.03$，$0.02<\dfrac{1}{2n}$

共通範囲は，$\dfrac{97}{6}=16.1\cdots<n<25$

これを満たす自然数 n は，$n=17,\ 18,\ \cdots,\ 24$　答

問題 3

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{100}$ を満たす自然数 $(x,\ y)$（$x\geqq y$）のうち，$x+y$ の総和を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{100}$ を x について解くと，$x=\dfrac{100y}{y-100}$

$x+y=\dfrac{100y}{y-100}+y=\dfrac{y^2}{y-100}$

$y-100=n$ とおくと，$x+y=\dfrac{(n+100)^2}{n}=n+200+\dfrac{10000}{n}=f(n)$　…①とおく。

$x+y$ は自然数より，$\dfrac{10000}{n}$ も自然数になるから，n は10000の約数である。

次の表により，$x \geqq y = n+100$ であるから，n の値は13通り考えられる。

n	1	2	4	5	8	10	16	20	25	40	50	80	100
$\dfrac{10000}{n}$	10000	5000	2500	2000	1250	1000	625	500	400	250	200	125	100

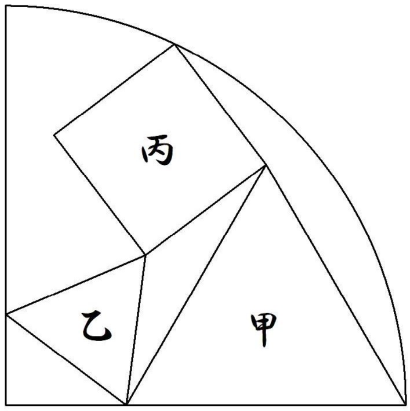
よって，$x+y$ の総和は，①より，

$f(1)+f(2)+f(4)+f(5)+f(8)+f(10)+f(16)+f(20)+f(25)+f(40)+f(50)+f(80)+f(100)$

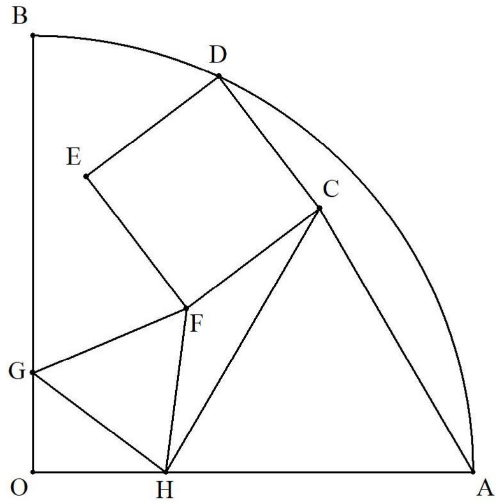
$=10201+5202+2704+2205+1458+1210+841+720+625+490+450+405+400=26911$ 答

追加問題 1

半径1の四分円内に，図のように正三角形甲，乙と正方形丙を配置する。乙と丙の１辺が等しいとき，甲，乙の１辺をそれぞれ求めよ。



解答　図のように記号を付ける。



甲の１辺が a であるから，OH＝$1-a$，GH＝b とおくと，

△GOHに三平方の定理を適用して，OG＝$\sqrt{b^2-(1-a)^2}$ である。

ここから，与えられた図形を複素平面上において考える。

O(0)，A(1)，B(i)，H$(1-a)$，G$\left(\sqrt{b^2-(1-a)^2}\,i\right)$ である。

C(c)，F(f)，D(d) とおく。

CはAをH中心に60°だけ回転させて点である。これを

C＝rot(A，H，60°)と表記する。

$$c-(1-a)=\{1-(1-a)\}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore c=\frac{2-a}{2}+\frac{\sqrt{3}a}{2}i$$

F＝rot(H，G，60°)より，$f-\sqrt{b^2-(1-a)^2}\,i=\left\{(1-a)-\sqrt{b^2-(1-a)^2}\,i\right\}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\therefore f=\frac{1-a+\sqrt{3}\sqrt{b^2-(1-a)^2}}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a+\sqrt{b^2-(1-a)^2}}{2}i$$

CF＝b より，$|f-c|=b$　$\left|\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{b^2-(1-a)^2}}{2}+\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}a+\sqrt{b^2-(1-a)^2}}{2}i\right|=b$

両辺を２乗して，$\left\{\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{b^2-(1-a)^2}}{2}\right\}^2+\left\{\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}a+\sqrt{b^2-(1-a)^2}}{2}\right\}^2=b^2$

整理すると，$a\left\{-1+2a-\sqrt{3}\sqrt{b^2-(1-a)^2}\right\}=0$

$a \fallingdotseq 0$ より，$-1+2a=\sqrt{3}\sqrt{b^2-(1-a)^2}$

両辺を２乗すると，$b^2=\dfrac{4-10a+7a^2}{3}$　$b>0$ より，$b=\dfrac{\sqrt{4-10a+7a^2}}{\sqrt{3}}$　…①

図より，$a>\dfrac{1}{2}$ であるから，①より，$\sqrt{b^2-(1-a)^2}=\dfrac{2a-1}{\sqrt{3}}$　$\therefore f=\dfrac{a}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{6}i$

D$=rot$(F，C，$-90°$)より，$d-c=(f-c)(-i)$　$\therefore d=\dfrac{2(3+\sqrt{3})-(3+4\sqrt{3})a}{6}+\dfrac{2-(2-\sqrt{3})a}{2}i$

$|d|=1$ より，$\left\{\dfrac{2(3+\sqrt{3})-(3+4\sqrt{3})a}{6}\right\}^2+\left\{\dfrac{2-(2-\sqrt{3})a}{2}\right\}^2=1$

展開して整理すると，$(10-\sqrt{3})a^2-(13+2\sqrt{3})a+2(2+\sqrt{3})=0$

両辺に $10+\sqrt{3}$ を掛けると，$97a^2-(136+33\sqrt{3})a+2(23+12\sqrt{3})=0$　$a=\dfrac{136+33\sqrt{3}\pm\sqrt{3(1305-112\sqrt{3})}}{194}$

$a<1$ より，$a=\dfrac{136+33\sqrt{3}-\sqrt{3(1305-112\sqrt{3})}}{194}$　（$\fallingdotseq 0.698068$）

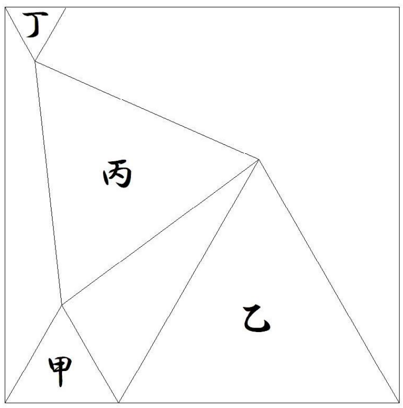
①より，$b=\dfrac{\sqrt{22150-1180\sqrt{3}-6\sqrt{7856493-1067332\sqrt{3}}}}{194}$　（$\fallingdotseq 0.378775$）

よって，正三角形甲，乙の１辺は，

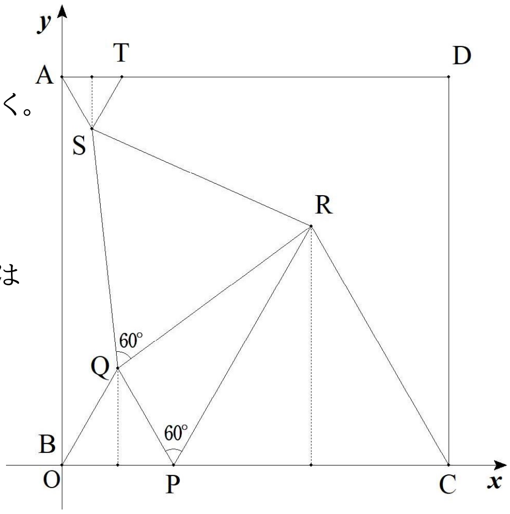
甲：$\dfrac{136+33\sqrt{3}-\sqrt{3(1305-112\sqrt{3})}}{194}$，乙：$\dfrac{\sqrt{22150-1180\sqrt{3}-6\sqrt{7856493-1067332\sqrt{3}}}}{194}$　答

追加問題２

１辺の長さが１である正方形内に，
図のように４個の正三角形甲乙丙丁が配置されている。
それぞれの１辺の長さを求めよ。



解答　与えられた図形を図のように座標平面上に置き，記号をつける。



A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1) である。

甲の１辺を u とすると，乙の１辺は，$1-u$ である。丁の１辺を v とおく。

丙の１辺は，△PQR に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{QR}=\sqrt{u^2+(1-u)^2-2u(1-u)\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{1-3u+3u^2}$$

正三角形を１つの中線で２分割してできる１つの直角三角形の３辺の比は

$1:2:\sqrt{3}$ であるから，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}u,\ \frac{\sqrt{3}}{2}u\right)$，

$\mathrm{R}\left(1-\frac{1}{2}(1-u),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-u)\right)\quad\therefore\left(\frac{1}{2}(1+u),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-u)\right)$，

$\mathrm{S}\left(\frac{1}{2}v,\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)$ となる。

ここから複素数を利用する。

$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}u+\frac{\sqrt{3}}{2}ui\right)$，$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2}(1+u)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-u)i\right)$，$\mathrm{S}\left(\frac{1}{2}v+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)i\right)$ である。

S は R を Q を中心に 60° だけ回転させた点であるから，

$$\left\{\frac{1}{2}v+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)i\right\}-\left(\frac{1}{2}u+\frac{\sqrt{3}}{2}ui\right)=\left[\left\{\frac{1}{2}(1+u)+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-u)i\right\}-\left(\frac{1}{2}u+\frac{\sqrt{3}}{2}ui\right)\right](\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$\frac{v-u}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)i=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2u)i\right\}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

複素数の相等により，$\frac{v-u}{2}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}(1-2u)$，$1-\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{\sqrt{3}}{2}v=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}(1-2u)$

後式より，$v=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$　（丁の１辺）

これを前式に代入して，$u=\frac{\sqrt{3}}{6}$　（甲の１辺）

このとき，

$1-u=\frac{6-\sqrt{3}}{6}$　（乙の１辺），$\sqrt{1-3u+3u^2}=\sqrt{1-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+3\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$　（丙の１辺）

よって，甲：$\frac{\sqrt{3}}{6}$，乙：$\frac{6-\sqrt{3}}{6}$，丙：$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$，丁：$\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$　答

補足　近似値は，甲：0.288675，乙：0.711325，丙：0.619657，丁：0.154701

(2024/10/13　ジョーカー)