問題1　上2桁の数をa、下2桁の数をbとすると、求める整数は次の条件を満たします。

$$100a + b = (a + b)^2 \Rightarrow a^2 + 2(b - 50)a + b^2 - b = 0 \cdots ①$$

上式をaについての2次式と考えれば、その判別式は、

$$\frac{D}{4} = (b - 50)^2 - b^2 - b = 50^2 - 99b$$

です。aが整数であるために、$50^2 - 99b$が平方数であることが必要で、適当な整数mが区間$(0,50)$に存在して、

$$50^2 - 99b = (50 - m)^2 \Rightarrow m(100 - m) = 99b \cdots ②$$

を満たします。右辺は99の倍数ですが、99は次の2整数の積で表現できます。

$$1 \times 99、3 \times 33、9 \times 11、11 \times 9、33 \times 3、99 \times 1$$

左辺はこれらを因数に含んでいる必要があります。それぞれのケースについて調べます。

・1×99、99×1の場合

明らかに$m = 1,99$が②式を満足して、$b = 1$です。①に代入すると、

$$a^2 + 2(1 - 50)a + 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 0,98$$

となりますが、$a > 0$なので$a = 98$です。

・3×33の場合

mが 3 の倍数なので、$m = 3k$と表現できます。ただし、kは自然数です。すると、

$$100 - m = 100 - 3k \equiv 1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$$

となって、$100 - m$は3の倍数ではなく、したがって、33の倍数でもないので、このケースはあり得ないことがわかります。

・9×11の場合

mが 9 の倍数なので、$m = 9k$と表現できます。ただし、kは自然数です。すると、

$$100 - m = 100 - 9k \Rightarrow 100 - 9k = 91,82,73,54,55,46,37,28,19,10,1$$

ですが、この中で11の倍数は55です。そのとき、$m = 45$ですから、

$$m(100 - m) = 99b \Rightarrow 45(100 - 45) = 99b \Rightarrow b = 25$$

です。①に代入すると、

$$a^2 + 2(25 - 50)a + 25^2 - 25 = 0 \Rightarrow a = 20,30$$

となります。

・33×3の場合

mが 33 の倍数なので、$m = 33k$と表現できます。ただし、kは自然数です。すると、

$$100 - m = 100 - 33k \equiv 1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$$

となり、$100 - m$は3の倍数ではないので、このケースはあり得ません。

・11×9の場合

mが 11 の倍数なので、$\mathrm{m}=11\mathrm{k}$と表現できます。ただし、kは自然数です。すると、

$$100-\mathrm{m}=100-11\mathrm{k}\Rightarrow100-11\mathrm{k}=89,78,67,56,45,34,23,12,1$$

です。この中で9の倍数は45です。そのとき、$\mathrm{m}=55$ですから、

$$\mathrm{m}(100-\mathrm{m})=99\mathrm{b}\Rightarrow55(100-55)=99\mathrm{b}\Rightarrow\mathrm{b}=25$$

これは、9×11の場合と同じで、$\mathrm{a}=20,30$となります。

以上より、

$$(\mathrm{a},\mathrm{b})=(20,25),(30,25),(98,1)$$

となり、求める整数は$2025,3025,9801$です。

問題2 $\sqrt{1+\mathrm{x}}$与式を x$=0$の近傍に Talor 展開すると(補足1参照)、

$$\sqrt{1+\mathrm{x}}=1+\frac{\mathrm{x}}{2}-\frac{\mathrm{x}^2}{8}+\frac{\mathrm{x}^3}{16}-\cdots$$

ですが、これを与式に適用すると、

$$\sqrt{1+\mathrm{n}^2}=\mathrm{n}\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{n}^2}}=\mathrm{n}\left\{1+\frac{\frac{1}{\mathrm{n}^2}}{2}-\frac{\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)^2}{8}+\frac{\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)^3}{16}-\cdots\right\}=\mathrm{n}+\frac{1}{2\mathrm{n}}-\frac{1}{8\mathrm{n}^3}+\frac{1}{16\mathrm{n}^5}-\cdots$$

です。少数部分は2項目以降ですが、nが大きくなるにつれて、小さくなります。$\mathrm{n}=2$のとき、上式は$\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}=2.236\cdots$なので、問題の条件を満たしません。したがって、$\mathrm{n}>2$で考えることになります。その場合、4項目の最大値は、

$$\frac{1}{16\cdot 3^5}=\frac{1}{3888}=0.0002572\cdots$$

ですから、少数第2位には影響しません。したがって、

$$\sqrt{1+\mathrm{n}^2}\text{の小数部分}\approx\frac{1}{2\mathrm{n}}-\frac{1}{8\mathrm{n}^3}$$

と近似して差し支えありません。この近似式を問題の条件に当てはめると(補足2参照)、

$$0.02\le\frac{1}{2\mathrm{n}}-\frac{1}{8\mathrm{n}^3}<0.03\Rightarrow\frac{1}{50}\le\frac{1}{2\mathrm{n}}-\frac{1}{8\mathrm{n}^3}<\frac{3}{100}\Rightarrow 17\le\mathrm{n}\le 24$$

となります。よって、求めるnは、$17\le\mathrm{n}\le 24$の自然数です。

問題3　与式の分母をはらうと、

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{100}\Rightarrow xy-100(x+y)=0$$

となりますが、掛け算の形にした方が扱いやすいので、両辺に100^2を加えて、因数分解すると、

$$xy-100(x+y)+100^2=100^2\Rightarrow(x-100)(y-100)=100^2$$

となります。$x\geq y$の条件下で、$x-100$と$y-100$の組合せを挙げると、下表のようになります。

$x-100$	$y-100$
1	10000
2	5000
4	2500
…	…
100	100

表の値は$100^2=2^4 5^4$の約数で、100がダブっていることに注意すれば、求める総和は次のようになります。

$$x+y\text{の総和}=100^2\text{の約数の総和}+\text{ダブルカウントされた約数}$$
$$+100\times\left(100^2\text{の約数の個数}+\text{ダブルカウントされた約数の個数}\right)$$

ここで、

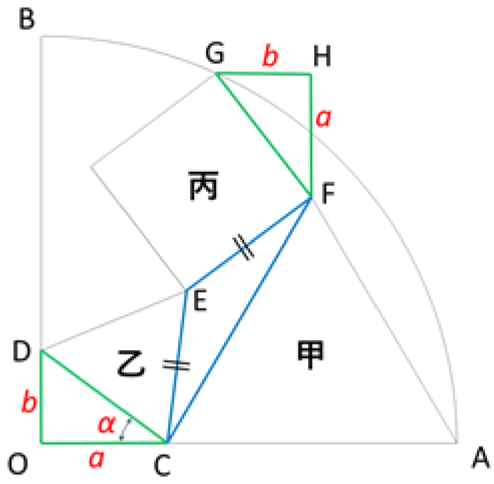
$$100^2\text{の約数の総和}=(2^0+2^1+\cdots 2^4)(5^0+5^1+\cdots 5^4)=24211$$
$$\text{ダブルカウントされた約数}=100$$
$$100^2\text{の約数の個数}=(1+4)(1+4)=25$$
$$\text{ダブルカウントされた約数の個数}=1$$

ですから、

$$x+y\text{の総和}=24211+100+100\times(25+1)=26911$$

です。

追加問題1



左図のように、各点に記号を付けます。

HはGとFからそれぞれ水平・垂直方向に直線を引いたときの交点です。

緑の三角形に着目すると、$\triangle OCD \equiv \triangle HFG$ですから、

$$OC = HF = a、OD = HG = b$$

としておきます。また、$\angle OCD = \alpha$とすると、

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}、\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

です。

そして、青色の三角形$\triangle ECF$に余弦定理を適用すると、$\angle CEF = \frac{\pi}{3} - \alpha$なので、

$$\cos\angle CEF = \frac{|EC|^2 + |EF|^2 - |CF|^2}{2|EC||EF|} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}^2 + \sqrt{a^2+b^2}^2 - (1-a)}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

ここで、

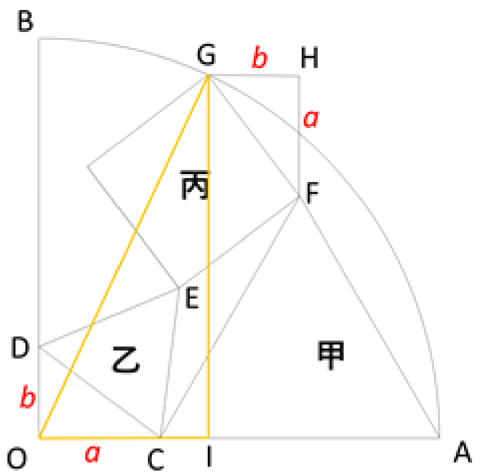
$$左辺 = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{a+\sqrt{3}b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$右辺 = \frac{1-a}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

なので、

$$\frac{1-a}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a+\sqrt{3}b}{2\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow 2a + \sqrt{3}b = 1 \cdots ①$$

です。



次に、GからOAに垂直に降ろした点をIとすると、オレンジ色の三角形$\triangle OGI$ができます。これに三平方の定理を適用すると、

$$OI^2 + GI^2 = OG^2$$

$$\Rightarrow \left\{1 - \left(b + \frac{1-a}{2}\right)\right\}^2 + \left\{a + \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}\right\}^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})a^2 + (\sqrt{3}-1)a - ab + b^2 - b = 0 \cdots ②$$

です。

①②を解くと、

$$(\mathrm{a},\mathrm{b})=\left(\frac{-33\sqrt{3}\pm\sqrt{15-4\sqrt{3}}(10\sqrt{3}+3)+58}{194},\frac{13\sqrt{3}\mp\sqrt{15-4\sqrt{3}}(\sqrt{3}+10)+33}{97}\right)$$

ですが、$\mathrm{a}>0$なので、

$$(\mathrm{a},\mathrm{b})=\left(\frac{-33\sqrt{3}+\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(10\sqrt{3}+3\right)+58}{194},\frac{13\sqrt{3}-\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+10\right)+33}{97}\right)$$

が有効な解となります。すると、線分CDの長さは、

$$|\mathrm{CD}|=\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{-33\sqrt{3}+\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(10\sqrt{3}+3\right)+58}{194}\right\}^2+\left\{\frac{13\sqrt{3}-\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+10\right)+33}{97}\right\}^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sqrt{11075-\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(171\sqrt{3}+2292\right)-590\sqrt{3}}}{194}$$

です。また、線分ACの長さは、

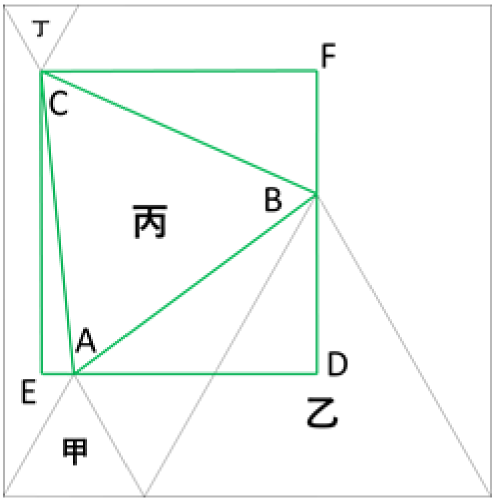
$$|\mathrm{AC}|=1-\mathrm{a}=\frac{33\sqrt{3}-\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(10\sqrt{3}+3\right)+136}{194}$$

です。以上より、求める辺の長さは以下の通りです。

$$\text{甲の長さ}=\frac{33\sqrt{3}-\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(10\sqrt{3}+3\right)+136}{194}=0.698068\cdots$$

$$\text{乙の長さ}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{11075-\sqrt{15-4\sqrt{3}}\left(171\sqrt{3}+2292\right)-590\sqrt{3}}}{194}=0.378775\cdots$$

追加問題2



左図のように、丙の頂点をA、B、Cとして、水平・垂直方向に直線を引き、その交点をD、E、Fとします。すると、⊿ABD、⊿ACE、⊿BCFができます。

そして、甲、乙、丙、丁の辺の長さをそれぞれL_1、L_2、L_3、L_4とすると、

$L_1 + L_2 = 1 \cdots ①$

です。また、⊿ABD、⊿ACE、⊿BCFに三平方の定理を適用します。

・⊿ABDの場合

$$\left(\frac{L_1}{2}+\frac{L_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}L_2}{2}-\frac{\sqrt{3}L_1}{2}\right)^2={L_3}^2 \cdots ②$$

・⊿ACEの場合

$$\left(\frac{L_1}{2}-\frac{L_4}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}L_1}{2}-\frac{\sqrt{3}L_4}{2}\right)^2={L_3}^2 \cdots ③$$

・⊿BCFの場合

$$\left(L_1+\frac{L_2}{2}-\frac{L_4}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}L_2}{2}-\frac{\sqrt{3}L_4}{2}\right)^2={L_3}^2 \cdots ④$$

①②③④を解くと、

$$(L_1, L_2, L_3, L_4)=\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{6-\sqrt{3}}{6},\pm\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2},\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\sqrt{2-\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

ですが、$0 < L_1, L_2, L_3, L_4 < 1$なので、

$$(L_1, L_2, L_3, L_4)=\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{6-\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2},\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)$$

が適切です。

以上より、求める辺の長さは以下の通りです。

$$甲の長さ = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$乙の長さ = \frac{6 - \sqrt{3}}{6}$$

$$丙の長さ = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

$$丁の長さ = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

補足１ $\sqrt{1+x}$の Taylor 展開

$f(x)=\sqrt{1+x}$とすると、

$$f(x)'=\frac{1}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow f(0)'=\frac{1}{2}$$

$$f(x)''=-\frac{1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f(0)''=-\frac{1}{4}$$

$$f(x)'''=\frac{3}{8(x+1)^{\frac{5}{2}}}\Rightarrow f(0)'''=\frac{3}{8}$$

なので、$x=0$の近傍で展開すると、

$$f(x)=f(0)+\frac{f(0)'}{1!}x+\frac{f(0)''}{2!}x^2+\frac{f(0)'''}{3!}x^2+\cdots=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\cdots$$

です。

補足２ $\frac{1}{50}\leq\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^3}<\frac{3}{100}$の解

数が少ないので、力任せにやっても構いませんが、少しだけ楽な方法で解を求めます。$\frac{1}{8n^3}$を無視すると、

$$\frac{1}{50}\leq\frac{1}{2n}<\frac{3}{100}\Rightarrow\frac{50}{3}<n\leq 25$$

となりますから、$n=\frac{50}{3},25$の付近を調べればよいです。

・$n=\frac{50}{3}=16.66\cdots$の付近

$n=16$の場合

$$\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{8\cdot 16^3}=\frac{1023}{32768}=0.0312\cdots$$

$n=17$の場合

$$\frac{1}{2\cdot 17}-\frac{1}{8\cdot 17^3}=\frac{1155}{39304}=0.0293\cdots$$

・$n=25$の付近

$n=25$の場合

$$\frac{1}{2\cdot 25}-\frac{1}{8\cdot 25^3}=\frac{2499}{125000}=0.0199\cdots$$

$n=24$の場合

$$\frac{1}{2\cdot 24}-\frac{1}{8\cdot 24^3}=\frac{2303}{110592}=0.0208\cdots$$

以上より、$17\leq n\leq 24$です。