447　よふかしのつらいおじさん

問題 1

【その 1】

題意を満たすもとの 4 桁の数は、平方数です。

$31^2 = 961,\ \underline{32^2 = 1024,\ 99^2 = 9801},\ 100^2 = 10000$ なので、

$99 - 32 + 1 = 68$ 個の平方数について調べればよいことになります。

No	数	平方	上+下	判断	No	数	平方	上+下	判断	No	数	平方	上+下	判断	No	数	平方	上+下	判断
1	32	1024	34	×	18	49	2401	25	×	35	66	4356	99	×	52	83	6889	157	×
2	33	1089	99	×	19	50	2500	25	×	36	67	4489	133	×	53	84	7056	126	×
3	34	1156	67	×	20	51	2601	27	×	37	68	4624	70	×	54	85	7225	97	×
4	35	1225	37	×	21	52	2704	31	×	38	69	4761	108	×	55	86	7396	169	×
5	36	1296	108	×	22	53	2809	37	×	39	70	4900	49	×	56	87	7569	144	×
6	37	1369	82	×	23	54	2916	45	×	40	71	5041	91	×	57	88	7744	121	×
7	38	1444	58	×	24	55	3025	55	○	41	72	5184	135	×	58	89	7921	100	×
8	39	1521	36	×	25	56	3136	67	×	42	73	5329	82	×	59	90	8100	81	×
9	40	1600	16	×	26	57	3249	81	×	43	74	5476	130	×	60	91	8281	163	×
10	41	1681	97	×	27	58	3364	97	×	44	75	5625	81	×	61	92	8464	148	×
11	42	1764	81	×	28	59	3481	115	×	45	76	5776	133	×	62	93	8649	135	×
12	43	1849	67	×	29	60	3600	36	×	46	77	5929	88	×	63	94	8836	124	×
13	44	1936	55	×	30	61	3721	58	×	47	78	6084	144	×	64	95	9025	115	×
14	45	2025	45	○	31	62	3844	82	×	48	79	6241	103	×	65	96	9216	108	×
15	46	2116	37	×	32	63	3969	108	×	49	80	6400	64	×	66	97	9409	103	×
16	47	2209	31	×	33	64	4096	136	×	50	81	6561	126	×	67	98	9604	100	×
17	48	2304	27	×	34	65	4225	67	×	51	82	6724	91	×	68	99	9801	99	○

表より、2025、3025、9801 です。

【その 2】

●4 桁の整数を、$abcd(= a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d)$ とします。

下 2 桁の数と上 2 桁の数との和の平方は、

$\{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \times \mathbf{10} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})\}^2 \quad \cdots \quad (*)$

$= 100(a + c)^2 + 20(a + c)(b + d) + \underline{(b + d)^2}$

下 1 桁は、下線部分により決まります。

1 桁の数の平方を調べます。

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

●下線部分の下 1 桁が d と等しくなる場合を調べます。

(0) d ＝0 の場合、 b＋d ＝0 より、 b ＝0 なので、[ア]a0c0

(1) d ＝1 の場合、

b + d ＝1 なら、 b ＝0 なので、[イ]a0c1

b + d ＝9 なら、 b ＝8 なので、[ウ]a8c1

(2) d ＝2 の場合、平方数の下 1 桁に 2 がないので、ありません。

(3) d ＝3 の場合、平方数の下 1 桁に 3 がないので、ありません。

(4) d ＝4 の場合、

b + d の下 1 桁が 2 なら、 b ＝8 なので、[エ]a8c4

b + d ＝8 なら、 b ＝4 なので、[オ]a4c4

(5) d ＝5 の場合、 b + d ＝5 より、 b ＝0 なので、[カ]a0c5

(6) d ＝6 の場合、

b + d の下 1 桁が 4 なら、 b ＝8 なので、[キ]a8c6

b + d ＝6 なら、 b ＝0 なので、[ク]a0c6

(7) d ＝7 の場合、平方数の下 1 桁に 7 がないので、ありません。

(8) d ＝8 の場合、平方数の下 1 桁に 8 がないので、ありません。

(9) d ＝9 の場合、

b + d の下 1 桁が 3 なら、 b ＝4 なので、[ケ]a4c9

b + d の下 1 桁が 7 なら、 b ＝8 なので、[コ]a8c9

以上 10 通りの可能性があります。

●a≠0 とします。

[ア]a0c0 のとき、

$(*) = \{(a+c)\times 10\}^2 = 100(a+c)^2$ となり、10 の位は 0 なので、 c ＝0。

$(*) = \{a\times 10\}^2 = 100a^2 \neq a000$ となり、適するものはありません。

[イ]a0c1 のとき、

$(*) = \{(a+c)\times 10+1\}^2 = 100(a+c)^2 + \mathbf{2(a+c)}\times 10+1$ 。

10 の位は、a≠0 として、2(a+c)－10＝c より、2a＋c＝10 なので、

(a,c)＝(1,8)、(2,6)、(3,4)、(4,2)、(5,0)。

よって、**1081**、**2061**、**3041**、**4021**、**5001** が候補ですが、適するものはありません。

[ウ]a8c1 のとき、

$(*) = \{(a+c)\times 10+9\}^2 = 100(a+c)^2 + 1\mathbf{8(a+c)}\times 10+\mathbf{8}1$ 。

8(a+c)+8 の 1 の位が c なので、

8(a+c)+8－10＝c として、8a+7c＝2　解なし

8(a+c)+8－20＝c として、8a+7c＝12　解なし

8(a+c)+8－30＝c として、8a+7c＝22　(a,c)＝(1,2)　**1821**(不適)

8(a+c)+8－40＝c として、8a+7c＝32　(a,c)＝(4,0)　**4801**(不適)

8(a+c)+8－50＝c として、8a+7c＝42　a≠0 なので解なし

8(a+c)+8－60＝c として、8a+7c＝52　(a,c)＝(3,4)　**3841**(不適)

8(a+c)+8－70＝c として、8a+7c＝62　解なし

8(a+c)+8－80＝c として、8a+7c＝72　(a,c)＝(2,8),(9,0)　**2881**(不適),**9801**($\boldsymbol{=99^2}$)(適)

8(a+c)+8－90＝c として、8a+7c＝82　(a,c)＝(5,6)　**5861**(不適)

8(a+c)+8－100＝c として、8a+7c＝92　(a,c)＝(8,4)　**8841**(不適)

8(a+c)+8－110＝c として、8a+7c＝102　解なし

8(a+c)+8－120＝c として、8a+7c＝112　(a,c)＝(7,8)　**7881**(不適)

8(a+c)+8－130＝c として、8a+7c＝122　解なし

8(a+c)+8－140＝c として、8a+7c＝132　解なし

8(a+c)+8－150＝c として、8a+7c＝142　解なし

[エ]a8c4

$(*)=\{(a+c)\times 10+12\}^2=100(a+c)^2+24(a+c)\times 10+144$ 。

4(a+c)+4 の 1 の位が c なので、

4(a+c)+4－10＝c として、4a+3c＝6　解なし

4(a+c)+4－20＝c として、4a+3c＝16　(a,c)＝(1,4),(4,0)　**1844**(不適),**4804**(不適)

8(a+c)+4－30＝c として、4a+3c＝26　(a,c)＝(2,6),(5,2)　**2864**(不適),**5824**(不適)

4(a+c)+4－40＝c として、4a+3c＝36　(a,c)＝(3,8),(6,4),(9,0)　**3884**(不),**6844**(不),**9804**(不)

8(a+c)+4－50＝c として、4a+3c＝46　(a,c)＝(7,6)　**7864**(不適)

8(a+c)+4－60＝c として、4a+3c＝56　(a,c)＝(8,8)　**8884**(不適)

8(a+c)+4－70＝c として、4a+3c＝66　解なし

[オ]a4c4

$(*)=\{(a+c)\times 10+8\}^2=100(a+c)^2+16(a+c)\times 10+64$ 。

6(a+c)+6 の 1 の位が c なので、

6(a+c)+6－10＝c として、6a+5c＝4　解なし

6(a+c)+6－20＝c として、6a+5c＝14　解なし

6(a+c)+6－30＝c として、6a+5c＝24　(a,c)＝(4,0)　**4404**(不適)

6(a+c)+6－40＝c として、6a+5c＝34　(a,c)＝(4,2)　**4424**(不適)

6(a+c)+6－50＝c として、6a+5c＝44　(a,c)＝(4,4)　**4444**(不適)

6(a+c)+6－60＝c として、6a+5c＝54　(a,c)＝(4,6),(9,0)　**4464**(不適),**9404**(不適)

6(a+c)+6－70＝c として、6a+5c＝64　(a,c)＝(4,8),(9,2)　**4484**(不適),**9424**(不適)

6(a+c)+6－80＝c として、6a+5c＝74　(a,c)＝(9,4)　**9444**(不適)

6(a+c)+6－90＝c として、6a+5c＝84　(a,c)＝(9,6)　**9464**(不適)

6(a+c)+6－100＝c として、6a+5c＝94　(a,c)＝(9,8)　**9484**(不適)

[カ]a0c5

$(*)=\{(a+c)\times 10+5\}^2=\underline{100(a+c)^2+100(a+c)}+25$ 。

下線部は 100 の位以上なので、c＝2

$(*)=\{(a+2)\times 10+5\}^2=100(a+2)^2+100(a+2)+25$ となり、
$(a+2)(a+2+1)=10a \quad \rightarrow \quad a^2-5a+6=0 \quad \rightarrow \quad (a-2)(a-3)=0 \quad \rightarrow \quad a=2,3$
ゆえに、2025($=\mathbf{45^2}$)(適)、3025($=\mathbf{55^2}$)(適)

[キ]a8c6
$(*)=\{(a+c)\times 10+14\}^2=100(a+c)^2+2\mathbf{8(a+c)}\times 10+1\mathbf{9}4$ 。
8(a+c)+9 の 1 の位が c なので、
8(a+c)+9−10=c として、8a+7c=1　解なし
8(a+c)+9−20=c として、8a+7c=11　解なし
8(a+c)+9−30=c として、8a+7c=21　解なし
8(a+c)+9−40=c として、8a+7c=31　(a,c)=(3,1)　3816(不適)
8(a+c)+9−50=c として、8a+7c=41　解なし
8(a+c)+9−60=c として、8a+7c=51　(a,c)=(2,5)　2856(不適)
8(a+c)+9−70=c として、8a+7c=61　(a,c)=(5,3)　5836(不適)
8(a+c)+9−80=c として、8a+7c=71　(a,c)=(1,9),(8,1)　1896(不適),8816(不適)
8(a+c)+9−90=c として、8a+7c=81　(a,c)=(4,7)　4876(不適)
8(a+c)+9−100=c として、8a+7c=91　(a,c)=(7,5)　7856(不適)
8(a+c)+9−110=c として、8a+7c=101　解なし
8(a+c)+9−120=c として、8a+7c=111　(a,c)=(6,9)　6896(不適)
8(a+c)+9−130=c として、8a+7c=121　(a,c)=(9,7)　9876(不適)

[ク]a0c6
$(*)=\{(a+c)\times 10+6\}^2=100(a+c)^2+1\mathbf{2(a+c)}\times 10+\mathbf{3}6$ 。
2(a+c)+3 の 1 の位が c なので、
2(a+c)+3−10=c として、2a+c=7　(a,c)=(1,5),(2,3),(3,1)　1056(不),2036(不),3016(不)
2(a+c)+3−20=c として、2a+c=17　(a,c)=(4,9),(5,7),(6,5),(7,3),(8,1)
4096($=\mathbf{64^2}$)(不),5076(不),6056(不),7036(不),8016(不)
2(a+c)+3−30=c として、2a+c=27　(a,c)=(9,9)　9096(不適)

[ケ]a4c9
$(*)=\{(a+c)\times 10+13\}^2=100(a+c)^2+2\mathbf{6(a+c)}\times 10+1\mathbf{6}9$ 。
6(a+c)+6 の 1 の位が c なので、
6(a+c)+6−10=c として、6a+5c=4　解なし
6(a+c)+6−20=c として、6a+5c=14　解なし
6(a+c)+6−30=c として、6a+5c=24　(a,c)=(4,0)　4409(不適)
6(a+c)+6−40=c として、6a+5c=34　(a,c)=(4,2)　4429(不適)
6(a+c)+6−50=c として、6a+5c=44　(a,c)=(4,4)　4449(不適)
6(a+c)+6−60=c として、6a+5c=54　(a,c)=(4,6),(6,9)　4469(不適),6499(不適)

6(a+c)+6－70＝c として、6a+5c＝64　(a,c)＝(4,8),(9,2)　　4489($=67^2$)(不),9429(不)

6(a+c)+6－80＝c として、6a+5c＝74　(a,c)＝(9,4)　　9449 (不適)

6(a+c)+6－90＝c として、6a+5c＝84　(a,c)＝(9,6)　　9469 (不適)

6(a+c)+6－100＝c として、6a+5c＝94　(a,c)＝(9,8)　　9489 (不適)

[コ]a8c9

$(*)=\{(a+c)\times 10+17\}^2=100(a+c)^2+34(a+c)\times 10+289$ 。

6(a+c)+6 の 1 の位が c なので、

4(a+c)+8－10＝c として、4a+3c＝2　解なし

4(a+c)+8－20＝c として、4a+3c＝12　解なし

4(a+c)+8－30＝c として、4a+3c＝22　(a,c)＝(1,6),(4,2)　　1869(不適),4829(不適)

4(a+c)+8－40＝c として、4a+3c＝32　(a,c)＝(2,8),(5,4),(8,0)　　2889(不),5849(不),8809(不)

4(a+c)+8－30＝c として、4a+3c＝42　(a,c)＝(6,6),(9,2)　　6869(不適),9829(不適)

4(a+c)+8－30＝c として、4a+3c＝52　(a,c)＝(7,8)　　7889(不適)

●以上から、、2025、3025、9801 です。

問題 2

$n+0.02\leq\sqrt{n^2+1}<n+0.03 \quad\rightarrow\quad n^2+0.04n+0.0004\leq n^2+1<n^2+0.06n+0.0009$

$\rightarrow \quad 0.04n+0.0004\leq 1<0.06n+0.0009$

$$\rightarrow \begin{cases}0.04n\leq 0.9996<0.06n+0.0005\\0.04n-0.0005\leq 0.9991<0.06n\end{cases} \rightarrow \begin{cases}n\leq\dfrac{0.9996}{0.04}<\dfrac{0.06n}{0.04}+\dfrac{0.0005}{0.04}\\\dfrac{0.04n}{0.06}-\dfrac{0.0005}{0.06}\leq\dfrac{0.9991}{0.06}<n\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases}n\leq 24+\dfrac{99}{100}<\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{80}\\\dfrac{2}{3}n-\dfrac{1}{120}\leq 16+\dfrac{391}{600}<n\end{cases} \rightarrow \quad 16+\frac{391}{600}<n\leq 24+\frac{99}{100} \quad\rightarrow\quad 17\leq n\leq 24$$

よって、n は、17、18、19、20、21、22、23、24

問題 3

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{100} \rightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{100} \rightarrow xy=100x+100y \rightarrow x(y-100)=100y$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{100\times y}{y-100} \quad\cdots\quad (\#)$$

ここで、100 の約数を調べます。

$100 = 2^2 \times 5^2$ なので、 $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ です。

先ず、y として 100 の約数に 100 を加えた数を代入して x を求めます。

y	101	102	104	105	110	120	125	150	200	合計
x	10100	5100	2600	2100	1100	600	500	300	200	
x+y	10201	5202	2704	2205	1210	720	625	450	400	23717

次に、(#)の分子の y も考慮して x を考えます。

k = y −100 とおくと、 y = k +100 です。

$$(\#)\quad x = \frac{100 \times y}{y - 100} = \frac{100 \times (k + 100)}{k} = 100 + \frac{10000}{k}$$

よって、 k が 10000 の約数であればよいわけです。

$10000 = 2^4 \times 5^4$ です。

上に 100 の約数が示されていますが、それ以外の約数は、

$\{8, 16, 40, 80, 200, 400, 125, 250, 500, 1000, 2000, 625, 1250, 2500, 5000, 10000\}$ です。

y が 200 のとき、 x = y です。

k = y −100 なので、 k は 100 より小さいものを考えます。

k	8	16	40	80	合計
y	108	116	140	180	
x	1350	725	350	225	
x+y	1458	841	490	405	3194

よって、23717+3194=26911

追加問題 1

●

座標を次のようにします。

$A(a, 0)$、$B(0, b)$

点 E は、正三角形甲の頂点なので、

$$E\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2} \times \sqrt{3}\right) = E\left(\frac{1+a}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}\right)$$

A と B 間の距離の 2 乗は、$a^2 + b^2$ です。

点 C(x,y)から A まで B までの距離の 2 乗を a^2+b^2 とします。

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2+b^2\\ x^2+(y-b)^2=a^2+b^2\end{cases}$$

(上)−(下)より、

$$-2ax+2by=-a^2+b^2 \quad\rightarrow\quad y=\frac{2ax-a^2+b^2}{2b}$$

これを(下)の式に入れて、

$$x^2+(y-b)^2=a^2+b^2 \quad\rightarrow\quad x^2+\left(\frac{2ax-a^2+b^2}{2b}-b\right)^2=a^2+b^2$$

$$\rightarrow\quad 4(a^2+b^2)x^2-4a(a^2+b^2)x+(a^2+b^2)(a^2-3b^2)=3 \quad\rightarrow\quad x=\frac{a\pm\sqrt{3}b}{2}$$

$$\rightarrow\quad x=\frac{a+\sqrt{3}b}{2}\left(\text{C は、0A の垂直 2 等分線より右}\right)$$

これを y の式に戻すと、

$$y=\frac{2ax-a^2+b^2}{2b} \quad\rightarrow\quad y=\frac{2a\times\frac{a+\sqrt{3}b}{2}-a^2+b^2}{2b}=\frac{\sqrt{3}a+b}{2}$$

よって、点 C は、

$$C\left(\frac{a+\sqrt{3}b}{2},\frac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$$

●次に点 C が AE の垂直二等分線上にあるとします。

$$A(a,0)、E\left(\frac{1+a}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}\right)$$

AE の傾きは、$\sqrt{3}$ です。

よって、AE の垂直二等分線は、$y=\frac{-1}{\sqrt{3}}(x-1)$

これに、点 C の座標を代入すると、

$$y=\frac{-1}{\sqrt{3}}(x-1) \quad\rightarrow\quad \frac{\sqrt{3}a+b}{2}=\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a+\sqrt{3}b}{2}-1\right) \quad\rightarrow\quad b=\frac{1-2a}{\sqrt{3}}$$

よって、点 C は、

$$C\left(\frac{a+\sqrt{3}b}{2},\frac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)=C\left(\frac{a+\sqrt{3}\times\frac{1-2a}{\sqrt{3}}}{2},\frac{\sqrt{3}a+\frac{1-2a}{\sqrt{3}}}{2}\right)=C\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2\sqrt{3}}\right)$$

●C から E へは、

横に $\frac{1+a}{2}-\frac{1-a}{2}=a$ 、縦に $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}-\frac{1+a}{2\sqrt{3}}=\frac{2-4a}{2\sqrt{3}}$

よって、E から F へは、

横に $-\frac{2-4a}{2\sqrt{3}}$ 、縦に a 行けばよいので F の座標は、

$$F\left(\frac{1+a}{2}-\frac{2-4a}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}+a\right)=F\left(\frac{(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}+4)a}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})a}{2}\right)$$

そして、点 F は原点中心、半径 1 の円周上にあるので、

$$x^2+y^2=1 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}+4)a}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})a}{2}\right)^2=1$$

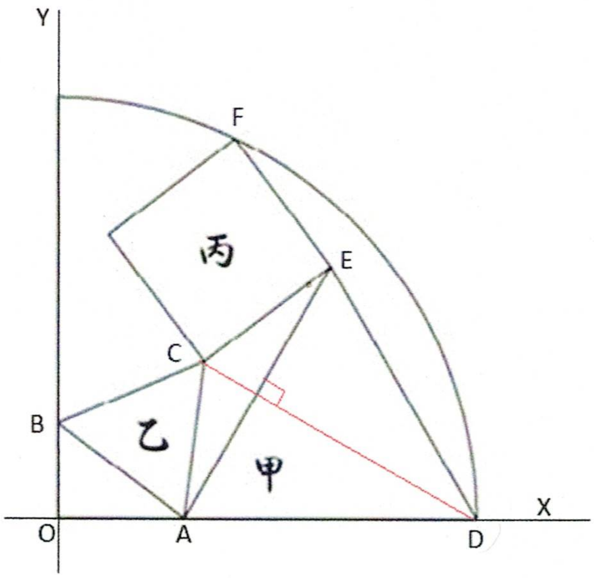
$$\rightarrow \quad (10-\sqrt{3})a^2-(7-4\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})=0$$

$$\rightarrow \quad a=\frac{(7-4\sqrt{3})\pm\sqrt{(7-4\sqrt{3})^2-4(10-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}}{20-2\sqrt{3}}$$

$$a=\frac{(7-4\sqrt{3})\pm\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{20-2\sqrt{3}}=\begin{cases} 0.3019\cdots(\text{複号}+) \\ -0.2932\cdots(\text{複号}-) \end{cases}$$

（a は複号が正のとき）

$$a=\frac{(7-4\sqrt{3})+\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{2(10-\sqrt{3})}=\frac{(58-33\sqrt{3})+(3+10\sqrt{3})\sqrt{15-4\sqrt{3}}}{194}$$



●よって、

甲の一辺は、

$$1-a=1-\frac{(58-33\sqrt{3})+(3+10\sqrt{3})\sqrt{15-4\sqrt{3}}}{194}=\frac{136+33\sqrt{3}-(3+10\sqrt{3})\sqrt{15-4\sqrt{3}}}{194}$$

乙の一辺は、

$$a^2+b^2=a^2+\left(\frac{1-2a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1-4a+7a^2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-4\times\frac{(7-4\sqrt{3})+\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{2(10-\sqrt{3})}+7\times\left\{\frac{(7-4\sqrt{3})+\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{2(10-\sqrt{3})}\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{(-4+7\sqrt{3})-2\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{(10-\sqrt{3})}+\frac{7}{2}\times\frac{(71-34\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{(10-\sqrt{3})^2}\right]$$

$$=\frac{\left\{(-4+7\sqrt{3})-2\sqrt{45-12\sqrt{3}}\right\}(10-\sqrt{3})+\left\{(497-238\sqrt{3})+(49-28\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}\right\}}{6(10-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\left\{(-122+148\sqrt{3})-(40-4\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}\right\}+\left\{(497-238\sqrt{3})+(49-28\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}\right\}}{6(103-20\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(125-30\sqrt{3})+(3-8\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{2(103-20\sqrt{3})}=\frac{(125-30\sqrt{3})+(3-8\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{2(103-20\sqrt{3})}\times\frac{103+20\sqrt{3}}{103+20\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(11075-590\sqrt{3})-(171+764\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{2\times 97^2}\times\frac{2}{2}$$

より、

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{(11075-590\sqrt{3})-(171+764\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}}{2\times 97^2}\times\frac{2}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(22150-1180\sqrt{3})-(342+1528\sqrt{3})\sqrt{45-12\sqrt{3}}}}{194}$$

追加問題２

●

座標を次のようにします。

$A(a,0)$、$D(b,1)$

点Ｂは、正三角形甲の頂点なので、

$$B\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\times\sqrt{3}\right)=B\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

点Ｃは、正三角形乙の頂点なので、

$$C\left(\frac{1+a}{2},\frac{1-a}{2}\times\sqrt{3}\right)=C\left(\frac{1+a}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}\right)$$

点Ｍは、BCの中点なので、

$$M\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{1+a}{2}}{2},\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}}{2}\right)=M\left(\frac{1+2a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

点Ｅは、正三角形丁の頂点なので、

$$E\left(\frac{b}{2},1-\frac{b}{2}\times\sqrt{3}\right)=E\left(\frac{b}{2},\frac{2-\sqrt{3}b}{2}\right)$$

●BCの傾きは、$\frac{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{1+a}{2}-\frac{a}{2}}=\sqrt{3}-2\sqrt{3}a$、BCの垂直２等分線EM上にEがあるので、

$$y-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2\sqrt{3}a-\sqrt{3}}\left(x-\frac{1+2a}{4}\right)\quad\rightarrow\quad\frac{2-\sqrt{3}b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2\sqrt{3}a-\sqrt{3}}\left(\frac{b}{2}-\frac{1+2a}{4}\right)$$

$$\rightarrow\quad(4-2\sqrt{3}b-\sqrt{3})(2\sqrt{3}a-\sqrt{3})=2b-1-2a$$

$$\rightarrow\quad\boldsymbol{(2\sqrt{3}-1)a+b-3ab+1-\sqrt{3}=0}\quad\cdots\quad\textbf{(1)}$$

また、BEとBCの距離が等しいので、２乗の形で比較して、

$$BE^2=\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{3}b}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2=a^2+b^2+ab-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b+1$$

$$BC^2=\left(\frac{1+a}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2=3a^2-3a+1$$

この２式を等しいとして、

$a^2+b^2+ab-\sqrt{3}a-\sqrt{3}b+1=3a^2-3a+1$

→ $\boldsymbol{2a^2-b^2-ab-(3-\sqrt{3})a+\sqrt{3}b=0}$ … **(2)**

(1)と(2)を連立させます。

(1)より、$b=\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}$ を(2)に入れて、

$2a^2-b^2-ab-(3-\sqrt{3})a+\sqrt{3}b=0$

$$2a^2-\left\{\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}\right\}^2-a\times\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}-(3-\sqrt{3})a+\sqrt{3}\times\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}=0$$

$$2a^2-(3-\sqrt{3})a=\left\{\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}\right\}^2+\frac{(2\sqrt{3}-1)a^2+(1-\sqrt{3})a}{3a-1}-\frac{(6-\sqrt{3})a+(\sqrt{3}-3)}{3a-1}$$

$$2a^2-(3-\sqrt{3})a=\left\{\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}\right\}^2+\frac{(2\sqrt{3}-1)a^2-5a-(\sqrt{3}-3)}{3a-1}$$

$$2a^2-(3-\sqrt{3})a=\left\{\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}\right\}^2+\frac{\{(2\sqrt{3}-1)a^2-5a-(\sqrt{3}-3)\}(3a-1)}{(3a-1)^2}$$

$$\{2a^2-(3-\sqrt{3})a\}(3a-1)^2=\{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})\}^2+\{(2\sqrt{3}-1)a^2-5a-(\sqrt{3}-3)\}(3a-1)$$

$18a^4-(39-9\sqrt{3})a^3+(20-6\sqrt{3})a^2-(3-\sqrt{3})a$

$=\quad(6\sqrt{3}-3)a^3+(-1-6\sqrt{3})a^2+3\sqrt{3}a+(1-\sqrt{3})$

$\boldsymbol{18a^4-(36-3\sqrt{3})a^3+21a^2-(3+2\sqrt{3})a-(1-\sqrt{3})=0}$

苦労して因数分解すると、

$\boldsymbol{(3a^2-3a+1)\{6a^2+(-6+\sqrt{3})a+(\sqrt{3}-1)\}=0}$

これを解くと、

$$a=\frac{3\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}(0.2886\cdots),\frac{3-\sqrt{3}}{3}(0.4226\cdots)$$

図を見て a は、$\frac{\sqrt{3}}{6}$ が適当です。

●よって、b は、

$$b=\frac{(2\sqrt{3}-1)a+(1-\sqrt{3})}{3a-1}=\frac{(2\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}}{6}+(1-\sqrt{3})}{3\times\frac{\sqrt{3}}{6}-1}=\frac{12-7\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-6}=\frac{7\sqrt{3}-12}{3(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}(0.1547\cdots)$$

また、

$$BC^2=3a^2-3a+1=3\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2-3\times\frac{\sqrt{3}}{6}+1=\frac{9\times(5-2\sqrt{3})}{9\times4}$$

$$\rightarrow \quad BC = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}(0.6196\cdots)$$

各正三角形の１辺は、

甲 $a = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 、乙 $1 - a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{6-\sqrt{3}}{6}$ 、丙 $BC = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$ 、丁 $b = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$