● 問題 447 解答＜三角定規＞

［問題１］

4 桁の整数 N の上 2 桁の数を a, 下 2 桁の数を b（$10 \leqq a \leqq 99,\ 0 \leqq b \leqq 99$）とする。

題意より， $(a+b)^2=100a+b$ 　$\therefore\ a^2+2(b-50)a+b^2-b=0$ …①

①を解いて，　$a=-(b-50)\pm\sqrt{2500-99b}$ …②

ここで a は整数だから②の根号内は整数の 2 乗であることが必要で,

$$2500-99b=m^2 \quad \therefore\ 2500-b^2=(50+m)(50-m)=99b \ \cdots③$$

③より $(50+m)(50-m)$ は 99 の倍数で，それらは次の場合に細分される。

(ⅰ) $50+m$ が 99 の倍数のとき，$m=49$, $b=1$ とすれば③が成り立つ。

このとき，②及び $a>0$ より，$a=98$, 　$\therefore\ N=9801$。

(ⅱ) $50+m$ が 33 の倍数になるとき，(ⅰ)の場合を除けば $m=16$。このとき $50-m=34$ が 3 の倍数にならないため，不可。

(ⅲ) $50+m$ が 11 の倍数になるとき，(ⅰ)(ⅱ)の場合を除けば $m=5,\ 27,\ 38$。

$m=5$ のとき，$50-m=45$ が 9 の倍数で，$b=25$ が③を満たすので，可。

このとき，$(a,\ N)=(30,\ 3025),\ (20,\ 2025)$

$m=27,\ 38$ は，ともに $50-m$ が 9 の倍数にならないため，不可。

(ⅳ) $50+m$ が 9 の倍数になるとき，(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)の場合を除けば $m=4,\ 13,\ 22,\ 31,\ 40$ だが，何れも $50-m$ が 11 の倍数にならないから，不可。

(ⅴ) $50+m$ が 3 の倍数のとき，$50-m$ が 33 の倍数で $m=17$ が候補だが，$50+m=67$ が 3 の倍数でないため，不可。

(ⅵ) $50-m$ が 99 の倍数となることもないため，不可。

以上より, 題意を満たす 4 桁の整数 N は，**9801, 3025, 2025** …[答]

［問題２］

$\sqrt{n^2+1}<n+1$ だから，$\sqrt{n^2+1}$ の整数部分は n で，題意より

$$\frac{2}{100} \leqq \sqrt{n^2+1}-n<\frac{3}{100} \ \cdots①$$

①の左側の不等式より $\left(n+\frac{1}{50}\right)^2 \leqq n^2+1$, 　$\frac{n}{25} \leqq 1-\frac{1}{2500}=\frac{2499}{2500}$, 　$\therefore\ n \leqq 24$ …②

右側の不等式より $n^2+1<\left(n+\frac{3}{100}\right)^2$, 　$1-\frac{9}{10000}=\frac{9991}{10000}<\frac{6n}{100}$, 　$\therefore\ 16<n$ …③

②③より，求める n は，$n=$**17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24** …[答]

［問題３］

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{100}\quad \therefore\ xy-100(x+y)=(x-100)(y-100)-10000=0\ \cdots①$$

①より，$x-100,\ y-100$ は 10000 の約数で，$x=100+2^p5^q,\ y=100+2^{4-p}5^{4-q}$ (ただし，$x\geqq y$)。

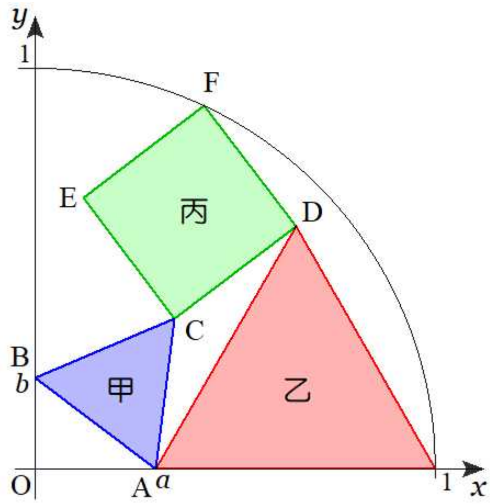
これら $x,\ y$ の総和は，$p=q=2$ のとき $x=y=200$ となることを考慮して

(10000 の約数の個数)× 100＋10000の約数の総和＋200

$$=5\cdot5\cdot100+200+(1+2+4+8+16)(1+5+25+125+625)=2700+31\cdot781=\mathbf{26{,}911}\ \cdots[答]$$

＜追加問題＞

［問題１］



図のように座標軸および各点を定める。

A, B の座標を A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b)$ で，C は, A を中心に B を時計回りに60° 回転させた点だから

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+\sqrt{3}\,b\\ \sqrt{3}\,a+b\end{pmatrix}$$

より，C$\left(\dfrac{a+\sqrt{3}\,b}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,a+b}{2}\right)$。

次に，乙の一辺が $1-a$ だから，D$\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,(1-a)}{2}\right)$ で，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(\frac{1-\sqrt{3}\,b}{2},\ \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,a-b}{2}\right)\quad\cdots①$$

題意より $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ だから， $a^2+b^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,a-b}{2}\right)^2\quad\cdots②$

①を展開して整理すると $(a-1)(2a-1+\sqrt{3}\,b)=0\quad \therefore\ 2a-1+\sqrt{3}\,b=0,\ b=\dfrac{\sqrt{3}\,(1-2a)}{3}\quad\cdots③$

③を①に戻し，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\left(a,\ \dfrac{\sqrt{3}\,(1-2a)}{3}\right)$。E は C を中心に D を反時計回りに90° 回転させた点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ \sqrt{3}\,(1-2a)/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\,(-1+2a)/3\\ a\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\cdots=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}(3+4\sqrt{3}\,)a+3-2\sqrt{3}\\ (6-3\sqrt{3}\,)a+3\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

F 点は半径 1 の円弧上にあるから $\{(3+4\sqrt{3}\,)a+3-2\sqrt{3}\,\}^2+\{(6-3\sqrt{3}\,)a+3\sqrt{3}\,\}^2=36\ \cdots④$

④を整理して $97a^2+(33\sqrt{3}-58)a+7-9\sqrt{3}=0$

$a>0$ でこれを解き $a=\dfrac{1}{194}(58-33\sqrt{3}+\sqrt{3915-336\sqrt{3}}\,)\quad\cdots⑤$

$(=0.3019\cdots)$

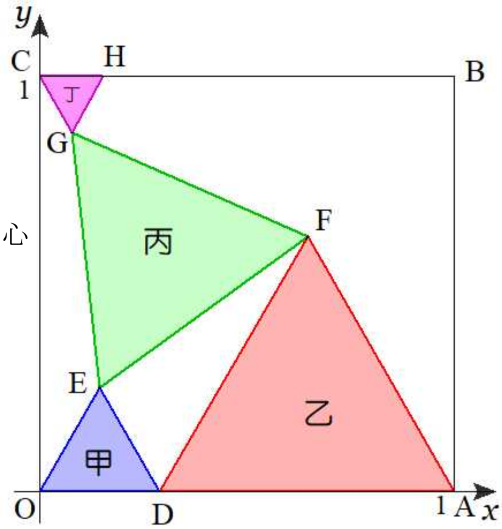
⑤③より，甲の一辺$=\sqrt{a^2+b^2}=$ ⋯⋯ $=\mathbf{0.3787\cdots}$

(厳密解はあまりに複雑になったため数値解のみで)

乙の一辺$=1-a=\mathbf{\dfrac{1}{194}\left(136+33\sqrt{3}-\sqrt{3915-336\sqrt{3}}\right)}$ ⋯[答]

$(=0.6980\cdots)$

［問題２］



図のように座標軸および各点を定める。

D の座標を D$(a,\ 0)$ とすると，E, F は E$\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,

F$\left(\dfrac{1}{2}(1+a),\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-a)\right)$。$\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-2a)\right)$ を E を中心に反時計回りに60° 回転させると，

$$\begin{pmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{OE}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 \\ \sqrt{3}\,(1-2a)/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a/2 \\ \sqrt{3}\,a/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-1/2 \\ \sqrt{3}\,/2\end{pmatrix}$$

よって，G$\left(2a-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$。

この結果より，a の値にかかわらず G の y 座標は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$で，△CGH が図のような正三角形になるのは，

$\sqrt{3}\left(2a-\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のときで，これを解いて $a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$。このとき，EF$=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^{1/2}$

$=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$，CG$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1$ 。

以上より，4 つの正三角形の 1 辺は

甲：$\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$，　乙：$\mathbf{1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$，　丙：$\mathbf{\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}}$，　丁：$\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1}$ ⋯[答]

$(=0.288\cdots)$　$(=0.711\cdots)$　$(=0.619\cdots)$　$(=0.154\cdots)$