第 448 回

問題1　2021 年関西大学（理系）入試問題の改題

$f(\theta)=\left(\sin\theta+\dfrac{1}{2\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\dfrac{1}{4\cos\theta}\right)^2\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最小値を求めよ。

解答　$f(\theta)=\left(\sin\theta+\dfrac{1}{a\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\dfrac{1}{b\cos\theta}\right)^2\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ 0<a\leqq b\right)$ とおいて考える。

展開して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用すると，

$$f(\theta)=\frac{1}{a^2\sin^2\theta}+\frac{1}{b^2\cos^2\theta}+1+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{a^2\sin^2\theta}+\frac{1}{b^2(1-\sin^2\theta)}+1+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$$

$\sin^2\theta=x$ とおき，$f(\theta)=\dfrac{1}{a^2x}+\dfrac{1}{b^2(1-x)}+1+\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}=g(x)$ とおく。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<x<1$ である。

$g'\ x\quad -\dfrac{1}{a^2x^2}+\dfrac{1}{b^2(1-x)^2}=-\dfrac{\{(b-a)x-b\}\{(a+b)x-b\}}{a^2b^2}=0$ とおくと，$x=\dfrac{b}{b-a}$ （>1），$\dfrac{b}{a+b}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{b}{a+b}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	極小かつ最小	↗	

右の増減表により，$g(x)$ の最小値は，$g\left(\dfrac{b}{a+b}\right)=\left(\dfrac{ab+a+b}{ab}\right)^2$

この値は，$x=\sin^2\theta=\dfrac{b}{a+b}$ で，$\sin\theta>0$ より，

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ のときである。

なお，最小値は，$a\geqq b>0$ の場合も，同じ結果になるから，

$a>0,\ b>0$ の条件で，最小値は $\left(\dfrac{ab+a+b}{ab}\right)^2$ となる。

さて，問題は，$a=2,\ b=4$ のときであるから，$f(\theta)$ の最小値は，$\left(\dfrac{2\cdot4+2+4}{2\cdot4}\right)^2=\dfrac{49}{16}$　答

（ただし，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{4}{2+4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき）

補足　$\theta\fallingdotseq\dfrac{38}{125}\pi$ （$\fallingdotseq 54.7^\circ$）

別解　$f(\theta)=\left(\sin\theta+\dfrac{1}{a\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\dfrac{1}{b\cos\theta}\right)^2\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ a>0,\ b>0\right)$ とおいて考える。

展開して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ を利用すると，

$$f(\theta)=1+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}+\frac{1}{b^2\cos^2\theta}=1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)+\frac{1}{b^2}(\tan^2\theta+1)$$

$$=1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2\tan^2\theta}+\frac{\tan^2\theta}{b^2}$$

ここで，後ろの 2 項について，共に正であるから，相加・相乗平均の関係を利用すると，

$$f(\theta)\geqq 1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\sqrt{\frac{1}{a^2\tan^2\theta}\cdot\frac{\tan^2\theta}{b^2}}=1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}$$

$$= 1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{ab+a+b}{ab}\right)^2$$ （最小値）

等号は，$\dfrac{1}{a^2\tan^2\theta}=\dfrac{\tan^2\theta}{b^2}$ のとき。すなわち，$\tan\theta>0$ より，$\tan\theta=\sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ のとき。

さて，問題は，$a=2,\ b=4$ のときであるから，$f(\theta)$ の最小値は，$\left(\dfrac{2\cdot4+2+4}{2\cdot4}\right)^2=\dfrac{49}{16}$ 答

（ただし，$\tan\theta=\sqrt{\dfrac{4}{2}}=\sqrt{2}$ のとき）

参考　類題として，

$f(\theta)=\left(\sin\theta+\dfrac{1}{a\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\dfrac{1}{b\cos\theta}\right)^2+\left(\tan\theta+\dfrac{1}{c\tan\theta}\right)^2\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ a>0,\ b>0,\ c>0\right)$ の最小値を考えてみた。

展開して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ を利用すると，

$$f(\theta)=1+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}+\frac{1}{b^2\cos^2\theta}+\tan^2\theta+\frac{2}{c}+\frac{1}{c^2\tan^2\theta}$$

$$=1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)+\frac{1}{b^2}(\tan^2\theta+1)+\tan^2\theta+\frac{2}{c}+\frac{1}{c^2\tan^2\theta}$$

$$=1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\tan^2\theta}+\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\tan^2\theta$$

ここで，後ろの２項について，共に正であるから，相加・相乗平均の関係を利用すると，

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\tan^2\theta}+\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\tan^2\theta\geqq2\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{1}{\tan^2\theta}\cdot\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\tan^2\theta}=\frac{2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+1)}}{abc}$$ より，

$$f(\theta)\geqq1+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+1)}}{abc}$$

$$=\frac{a^2b^2c+2ab(ab+bc+ca)+c(a^2+b^2)+2ab\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+1)}}{a^2b^2c}$$ （最小値）

なお，等号は，$\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\left(1+\dfrac{1}{b^2}\right)\tan^2\theta$ のとき。

すなわち，$\tan\theta>0$ より，$\tan\theta=\sqrt[4]{\dfrac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}{1+\frac{1}{b^2}}}=\sqrt[4]{\dfrac{b^2(a^2+c^2)}{a^2c^2(b^2+1)}}$ のとき。

例　$a=2,\ b=3,\ c=6$ のとき，最小値 $\dfrac{161}{36}$ （$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき）

問題２　2024 年名古屋市立大学（医学部）入試問題の改題

n を正の自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　3^n-2^n を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　3^n-2^n+4n を 10 で割った余りを r_n とする。 $r_n=7$ となるような n を小さい順に並べて得られる数列を $\{a_m\}$（ $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ ）とする。このとき a_{2024} の値を求めよ。

解答

(1)　3^n を 10 で割った余りは， 3^n の下一桁である。順に 4 を法として 3, 9, 7, 1 が繰り返される。

また，2^n を 10 で割った余りは， 2^n の下一桁である。順に 4 を法として 2, 4, 8, 6 が繰り返される。

従って， 3^n-2^n を 10 で割った余りは， 3^n-2^n の下一桁である．順に 4 を法として 1, 5, -1, -5，すなわち 1, 5, 9, 5 （mod 10 ）が繰り返される。

よって， 3^n-2^n を 10 で割った余りは， k を正の整数として，

$n=4k-3$ のとき， 1 ；$n=4k-2$ のとき， 5 ；$n=4k-1$ のとき， 9 ；$n=4k$ のとき， 5　答

(2)　$4n$ を 10 で割った余りは， $4n$ の下一桁である。順に 5 を法として 4, 8, 2, 6, 0 が繰り返される。

(1) より， 3^n-2^n は 4 を法として 1, 5, 9, 5 が繰り返されるから， 3^n-2^n+4n を 10 で割った余り r_n は， $4\times5=20$ を法として，次の表のように， r_n（3^n-2^2+4n の下一桁）を求めることができる。（mod 10 ）

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3^n-2^n の下一桁	1	5	9	5	1	5	9	5	1	5	9	5	1	5	9	5	1	5	9	5
$4n$ の下一桁	4	8	2	6	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6	0
r_n	5	3	1	1	1	9	7	7	7	5	3	3	3	1	9	9	9	7	5	5

$r_n=7$ となるのは， 4 箇所あるから， k を正の整数として，

[1]　$m=4k-3$ のとき， $a_m=7+20(m-1)$ ；[2]　$m=4k-2$ のとき， $a_m=8+20(m-1)$ ；

[3]　$m=4k-1$ のとき， $a_m=9+20(m-1)$ ；[4]　$m=4k$ のとき， $a_m=18+20(m-1)$

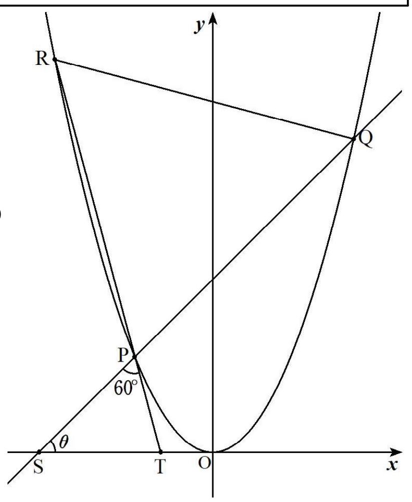
ここで， $m=2024=4\cdot506$ より， $k=506$ であるから，[4] より， $a_{2024}=18+20(506-1)=10118$　答

問題３　2004年東京大学入試問題の改題

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の３点 P，Q，R が次の条件を満たしている。

「三角形 PQR は１辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは１である。」

このとき，a の値を求めよ。



解答　直線 PQ の傾きが $m=\tan\theta>0$ の場合を考える。

直線 PQ，PR と x 軸との交点をそれぞれ S，T とすると，

$\angle$SPT$=60°$，$\angle$PST$=\theta$ であるから，$\angle$STP$=180°-(60°+\theta)=120°-\theta$

$\angle$STP$=90°$ のとき，直線 PR は y 軸と平行になり，Rが得られなくなる。

従って，$120°-\theta\fallingdotseq 90°$ より，$\theta\fallingdotseq 30°$ であるから，$m\fallingdotseq\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　…①

$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)\ (p<q)$ とおける。

直線 PQ の傾きが m であるから，$\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=m$

すなわち，$p+q=m$ より，$q=m-p$　…②

$\mathrm{Q}(m-p,\ (m-p)^2)$ となる。

ただし，$p<q=m-p$ より，$p<\dfrac{m}{2}$　…③

また，$a=\mathrm{PQ}=\sqrt{(q-p)^2+(q^2-p^2)^2}=(q-p)\sqrt{1+(p+q)^2}=(m-2p)\sqrt{m^2+1}$　…④

ここで，便宜的に複素平面で考える。

$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(p+p^2i)$，$\mathrm{Q}(m-p+(m-p)^2i)$ で，$\mathrm{R}(r)$ とおく。

[1]　R は Q を P 中心に 60° だけ回転させた点　または　[2]　R は Q を P 中心に −60° だけ回転させた点

である。

[1] のとき，$r-(p+p^2i)=\{m-p+(m-p)^2i-(p+p^2i)\}(\cos 60°+i\sin 60°)$ より，

$$r=(p+p^2i)+\{m-p+(m-p)^2i-(p+p^2i)\}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{m-\sqrt{3}m^2+2\sqrt{3}mp}{2}+\frac{\sqrt{3}m+m^2+(-2\sqrt{3}-2m)p+2p^2}{2}i=r_1+r_2i$$ とおくと，$\mathrm{R}(r_1,\ r_2)$ である。

ただし，$r_1=\dfrac{m-\sqrt{3}m^2+2\sqrt{3}mp}{2}$，$r_2=\dfrac{\sqrt{3}m+m^2+(-2\sqrt{3}-2m)p+2p^2}{2}$　…⑤である。

R は $y=x^2$ 上の点であるから，${r_1}^2-r_2=0$ に⑤を代入すると，

$$\left(\frac{m-\sqrt{3}m^2+2\sqrt{3}mp}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{3}m+m^2+(-2\sqrt{3}-2m)p+2p^2}{2}=0$$

整理すると，$(2p-m)\{2(3m^2-1)p-(2\sqrt{3}+m+2\sqrt{3}m^2-3m^3)\}=0$

①より，$p=\dfrac{m}{2}$，$p=\dfrac{2\sqrt{3}+m+2\sqrt{3}m^2-3m^3}{2(3m^2-1)}$

$p=\dfrac{m}{2}$ は③を満たさないので，不適

$p=\dfrac{2\sqrt{3}+m+2\sqrt{3}m^2-3m^3}{2(3m^2-1)}$ は③を満たすかどうか確かめる。

$\dfrac{m}{2}-p=\dfrac{\sqrt{3}(m^2+1)}{3m^2-1}>0$ とおくと，$m>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは③を満たす。

このとき，④より， $a=(m-2p)\sqrt{m^2+1}=\dfrac{2\sqrt{3}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{3m^2-1}$

[2] のとき， $r-(p+p^2i)=\{m-p+(m-p)^2i-(p+p^2i)\}\{\cos(-60°)+i\sin(-60°)\}$ より，

$$r=(p+p^2i)+\{m-p+(m-p)^2i-(p+p^2i)\}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$=\dfrac{m+\sqrt{3}m^2-2\sqrt{3}mp}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}m+m^2+(2\sqrt{3}-2m)p+2p^2}{2}i=r_1+r_2i$ とおくと，R$(r_3,\ r_4)$ である。

ただし， $r_3=\dfrac{m+\sqrt{3}m^2-2\sqrt{3}mp}{2}$， $r_4=\dfrac{-\sqrt{3}m+m^2+(2\sqrt{3}-2m)p+2p^2}{2}$ …⑥である。

R′ は $y=x^2$ 上の点であるから， ${r_3}^2-r_4=0$ に⑥を代入すると，

$$\left(\frac{m+\sqrt{3}m^2-2\sqrt{3}mp}{2}\right)^2-\frac{-\sqrt{3}m+m^2+(2\sqrt{3}-2m)p+2p^2}{2}=0$$

整理すると， $(2p-m)\{2(3m^2-1)p-(-2\sqrt{3}+m-2\sqrt{3}m^2-3m^3)\}=0$

①より，$p=\dfrac{m}{2}$， $p=\dfrac{-2\sqrt{3}+m-2\sqrt{3}m^2-3m^3}{2(3m^2-1)}$

$p=\dfrac{m}{2}$ は③を満たさないので，不適

$p=\dfrac{-2\sqrt{3}+m-2\sqrt{3}m^2-3m^3}{2(3m^2-1)}$ は③を満たすかどうか確かめる。

$\dfrac{m}{2}-p=-\dfrac{\sqrt{3}(m^2+1)}{3m^2-1}>0$ とおくと， $m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは③を満たす。

このとき，④より， $a=-(m-2p)\sqrt{m^2+1}=\dfrac{2\sqrt{3}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{-(3m^2-1)}$

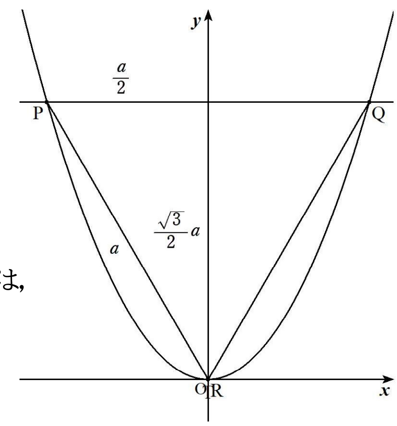
従って，[1]，[2] より，

$m>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき， $a=\dfrac{2\sqrt{3}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{3m^2-1}$， $m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき， $a=\dfrac{2\sqrt{3}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{-(3m^2-1)}$

となり，まとめると， $m\fallingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき， $a=\dfrac{2\sqrt{3}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}$ ★

この結果より， a は m についての偶関数であるから， $m<0$ でも成り立つ。

最後に， $m=0$ のとき（右図参照），



P$\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ は $y=x^2$ 上の点であるから，$\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

$a>0$ より， $a=2\sqrt{3}$

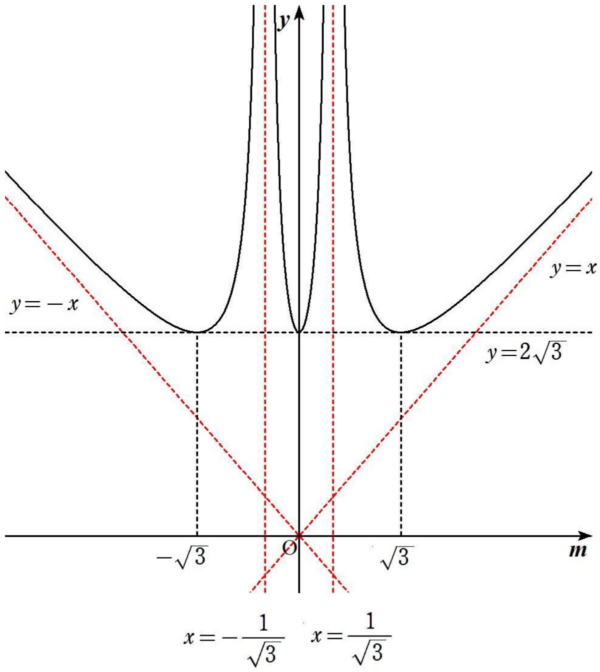
これは，★で $m=0$ とおいたものである。

よって，直線 PQ の傾きが m（ $m\fallingdotseq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ）のとき，正三角形 PQR の 1 辺 a は，

$a=\dfrac{2\sqrt{3}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}$ 公式

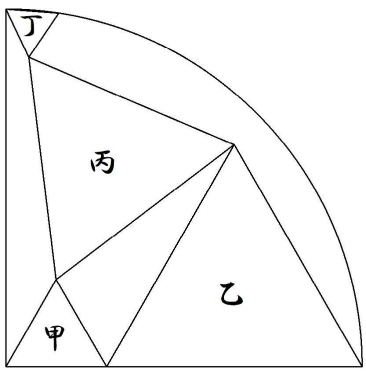
さて，問題 3 では，$m=1$ の場合であるから， $a=2\sqrt{6}$ 答

参考　$y=\dfrac{2\sqrt{3}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}$ のグラフ

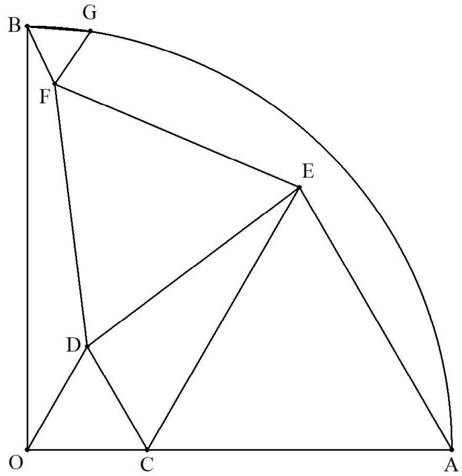


追加問題１

半径１の四分の一円内に図のように
正三角形甲乙丙丁を配置する。
それぞれの正三角形の１辺を求めよ。



解答　与えられた図形に記号を付け，OA を実軸，OB を虚軸とする複素数平面上におく。O(0)，A(1)，B(i) である。
ここで，「P は Q を R を中心に θ だけ回転させた点である。」を，便宜的に，P＝rot(Q，R，θ) で表す。



P(p)，Q(q)，R(r)，$\theta=60^\circ$ のとき，$p-r=(q-r)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

$\therefore\ p=q+(q-r)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\dfrac{1}{2}(q+r)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(q-r)i$　（公式）

C(x)，D(d)，E(e)，F(f)，G(g) とおく。

D＝rot(C，O，60°) より，$d=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}xi$

E＝rot(A，C，60°) より，$e=\dfrac{1}{2}(1+x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-x)i$

F＝rot(E，D，60°) より，$f=\dfrac{1}{2}(e+d)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(e-d)i=\dfrac{4x-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

G＝rot(F，B，60°) より，$g=\dfrac{1}{2}(f+i)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(f-i)i=\dfrac{2x-2+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}x+1}{2}i$

Gは半径1の円弧上の点であるから，$|g|=1$ より，$\left(\dfrac{2x-2+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}\,x+1}{2}\right)^2=1$

整理すると，$4x^2+2(\sqrt{3}-1)x+1-\sqrt{3}=0$ $\quad x=\dfrac{-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2-4(1-\sqrt{3})}}{4}$

$x>0$ より，$x=\dfrac{-(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2\sqrt{3}}}{4}=\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}{4}$ $\quad\therefore$甲の1辺：$\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}{4}$ （≒ 0.28229）

乙の1辺$=1-x=\dfrac{3+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}}{4}$ （≒ 0.71771）

丙の1辺$=|e-d|=\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{-2\sqrt{3}\sqrt{3}\,x}{2}i\right|=\sqrt{3x^2-3x+1}=\dfrac{\sqrt{4+3\sqrt{3}-3\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}{2}$ （≒ 0.626253）

丁の1辺$=|g-i|=\sqrt{\left(\dfrac{2x-2+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}\,x-1}{2}\right)^2}=\sqrt{4x^2-2x+2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt[4]{27}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{3}-2\sqrt[4]{108}}}{2}$ （≒ 0.148727）

よって，

甲：$\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}{4}$，乙：$\dfrac{3+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}}{4}$，丙：$\dfrac{\sqrt{4+3\sqrt{3}-3\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}{2}$，丁：$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{3}-2\sqrt[4]{108}}}{2}$

追加問題2

1辺の長さが1の正七角形ABCDEFGについて，

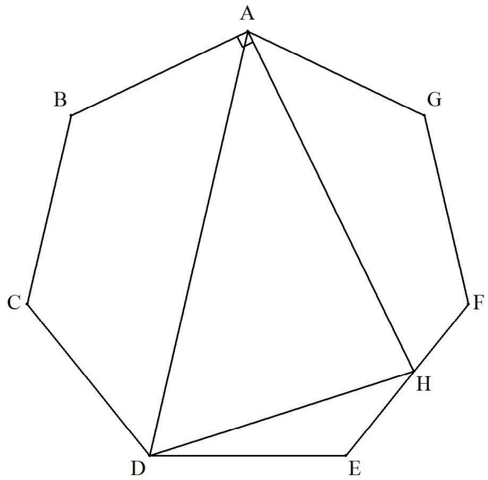
HをEF上にHA⊥ABとなるようにとる。

次の□に当てはまる鋭角を求めよ。

(1) AD＝1＋2cos□

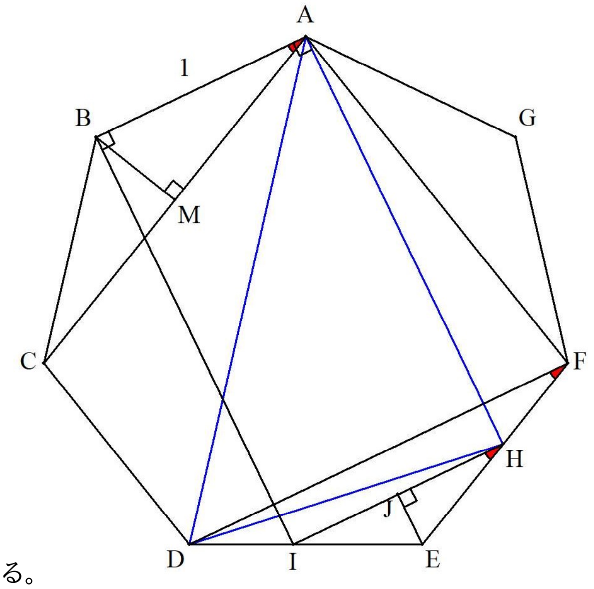
(2) DH＝2cos□

(3) AH＝2cos□



解答 $\dfrac{\pi}{7}=\theta$ とおくと，正七角形の1つの外角は，$\dfrac{2\pi}{7}=2\theta$，

1つの内角は，$\pi-2\theta=5\theta$ である。



(1) ACの中点を M とすると，$\angle AMB=90^\circ$

$\triangle BAM$ について，$\angle BAM=\theta$，$AB=1$ であるから，

$AM=\cos\theta \quad \therefore AC=2AM=2\cos\theta=BD$

四角形 ABCD にトレミーの定理を適用すると，

$BC\cdot AD+AB\cdot CD=AC\cdot BD$ より，$1\cdot AD+1^2=(2\cos\theta)^2$

$\therefore AD=4\cos^2\theta-1=2(1+\cos 2\theta)-1=1+2\cos 2\theta$

$=1+2\cos\square$ とおくと，□は鋭角であるから，

$\square=2\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ 答

(2) DE 上に点 I を，四角形 ABIH が長方形になるようにとり，

E から HI に下した垂線の足を J とすると，J は HI の中点となる。

$\triangle EHJ$ について，$HJ=\dfrac{1}{2}HI=\dfrac{1}{2}$，$\angle EHJ=\angle EFD=\theta$ より，

$EH=\dfrac{1}{2\cos\theta}$ であるから，$HF=EF-EH=1-\dfrac{1}{2\cos\theta}=DI$ また，$DF=2\cos\theta$，$IF=DH$ である。

四角形 DIHF にトレミーの定理を適用すると，$DH\cdot IF=IH\cdot DF+DI\cdot HF$ より，

$$DH^2=1\cdot 2\cos\theta+\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2=\frac{8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta+1}{4\cos^2\theta} \quad \cdots①$$

ここで，$4\theta=\pi-3\theta$ より，$\sin 4\theta=\sin(\pi-3\theta)$ $\quad 2\sin 2\theta\cos 2\theta=\sin 3\theta$

$2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\sin\theta\neq 0$ より，両辺を $\sin\theta$ で割ると，$4\cos\theta(2\cos^2\theta-1)=3-4(1-\cos^2\theta)$

$\therefore 8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=0 \quad \cdots②$

これを利用すると①より，$DH^2=\dfrac{8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1+8\cos^2\theta}{4\cos^2\theta}=\dfrac{8\cos^2\theta}{4\cos^2\theta}=2$

$DH>0$ より，$DH=\sqrt{2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}=2\cos\square$ とおくと，□は鋭角であるから，$\square=\dfrac{\pi}{4}$ 答

(3) $\triangle AHF$ について，$HF=1-\dfrac{1}{2\cos\theta}$，$FA=2\cos\theta$，$\angle HFA=4\theta=\pi-3\theta$ より，余弦定理を適用して，

$$AH^2=\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2+(2\cos\theta)^2-2\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)\cdot 2\cos\theta\cdot\cos(\pi-3\theta)$$

$$=1-\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{4\cos^2\theta}+4\cos^2\theta+2(2\cos\theta-1)\cos 3\theta$$

ここで，②の両辺を $\cos\theta$ で割ると，$\dfrac{1}{\cos\theta}=-8\cos^2\theta+4\cos\theta+4$ であるから，

$$AH^2=1-(-8\cos^2\theta+4\cos\theta+4)+\frac{1}{4}(-8\cos^2\theta+4\cos\theta+4)^2+2(2\cos\theta-1)(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$=32\cos^4\theta-24\cos^3\theta-12\cos^2\theta+10\cos\theta+1$$

$$=(8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1)(4\cos\theta-1)+2\cos\theta+2=2\cos\theta+2 \quad (\because ②)$$

$$=2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+2=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

AH＞0より，$\mathrm{AH}=2\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cos\square$ とおくと，□は鋭角であるから，$\square=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{14}$ 答

別解1　△AEHについて，$\mathrm{AE}=4\cos^2\theta-1$，$\mathrm{EH}=\dfrac{1}{2\cos\theta}$，$\angle\mathrm{AEH}=2\theta$ より，余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AH}^2=(4\cos^2\theta-1)^2+\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2-2(4\cos^2\theta-1)\cdot\frac{1}{2\cos\theta}\cdot\cos 2\theta$$

$$=(4\cos^2\theta-1)^2+\left(\frac{-8\cos^2\theta+4\cos\theta+4}{2}\right)^2-2(4\cos^2\theta-1)\cdot(-8\cos^2\theta+4\cos\theta+4)\cdot(2\cos^2\theta-1)$$

$$=64\cos^6\theta-32\cos^5\theta-48\cos^4\theta+8\cos^3\theta+12\cos^2\theta+4\cos\theta+1$$

$$=(8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1)(-8\cos^2\theta-2\cos\theta-1)+2\cos\theta+2=2\cos\theta+2\quad(\because ②)$$

$$=2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+2=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

AH＞0より，$\mathrm{AH}=2\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cos\square$ とおくと，□は鋭角であるから，$\square=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{14}$ 答

別解2　△AEFについて，$\mathrm{AE}=4\cos^2\theta-1$，$\mathrm{AF}=2\cos\theta$，$\mathrm{EH}=\dfrac{1}{2\cos\theta}$，$\mathrm{HF}=1-\dfrac{1}{2\cos\theta}$ であるから，

スチュワートの定理(*)を適用すると，

$$\mathrm{AH}^2=\frac{1}{2\cos\theta}\cdot(2\cos\theta)^2+\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)\cdot(4\cos^2\theta-1)^2-\frac{1}{2\cos\theta}\cdot\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)$$

$$=16\cos^4\theta-8\cos^3\theta-8\cos^2\theta+6\cos\theta+1+\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{4\cos^2\theta}$$

$$=16\cos^4\theta-8\cos^3\theta-8\cos^2\theta+6\cos\theta+1+(-8\cos^2\theta+4\cos\theta+4)+\frac{(-8\cos^2\theta+4\cos\theta+4)^2}{4}$$

$$=32\cos^4\theta-24\cos^3\theta-12\cos^2\theta+10\cos\theta+1$$

$$=(8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1)(4\cos\theta-1)+2\cos\theta+2=2\cos\theta+2\quad(\because ②)$$

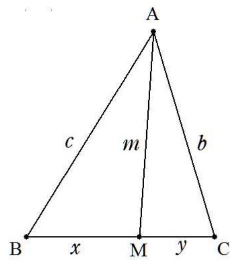
$$=2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+2=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

AH＞0より，$\mathrm{AH}=2\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cos\square$ とおくと，□は鋭角であるから，$\square=\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{14}$ 答

(*)　スチュワートの定理

△ABCのBC上の点をMとし，$\mathrm{BM}=x$，$\mathrm{CM}=y$，$\mathrm{AM}=m$，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{AC}=b$ とおくと，

$$(x+y)(m^2+xy)=xb^2+yc^2 \Leftrightarrow m^2=\frac{xb^2+yc^2}{x+y}-xy$$



証明　$\angle\mathrm{AMB}+\angle\mathrm{AMC}=180^\circ$ であるから，$\cos\angle AMB+\cos\angle AMC=0$

余弦定理を適用して，$\dfrac{x^2+m^2-c^2}{2xm}+\dfrac{y^2+m^2-b^2}{2ym}=0$

分母を払って，$y(x^2+m^2-c^2)+x(y^2+m^2-b^2)=0$

$(x+y)m^2+xy(x+y)=xb^2+yc^2\qquad\therefore(x+y)(m^2+xy)=xb^2+yc^2$ 終

(2024/11/10　ジョーカー)