448 解答　よふかしのつらいおじさん

問題 1

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき、$\begin{cases}0<sin\,\theta<1\\0<cos\,\theta<1\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}0<sin^2\theta<1\\0<cos^2\theta<1\end{matrix}$ です。

$$f(\theta)=\left(\sin\theta+\frac{1}{2\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\frac{1}{4\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{4\cos^2\theta}\right)+\frac{5}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{sin^2\theta}+\frac{1}{4(1-sin^2\theta)}\right\}+\frac{5}{2}\quad\cdots\quad(A)$$

$x=\sin^2\theta$ とおきます。$(0<x<1)$

$$g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{4(1-x)}=\frac{4-3x}{4x(1-x)}=\frac{3x-4}{4x^2-4x}=\frac{1}{\frac{4x^2-4x}{3x-4}}\quad\cdots\quad(B)$$

g (x)が最小のとき、 f (θ)は最小です。

$$h(x)=\frac{4x^2-4x}{3x-4}=\frac{9}{9}\times\frac{4x^2-4x}{3x-4}=\frac{1}{9}\times\frac{36x^2-36x}{3x-4}=\frac{1}{9}\left(12x+4+\frac{16}{3x-4}\right)\quad\cdots\quad(C)$$

h (x)が最大のとき、 f (θ)は最小です。

$$h'^{(x)}=\left[\frac{1}{9}\left(12x+4+\frac{16}{3x-4}\right)\right]'=\frac{1}{9}\left\{12+\frac{16\times(-3)}{(3x-4)^2}\right\}=\frac{12}{9}\left\{1-\frac{4}{(3x-4)^2}\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\times\frac{9x^2-24x+16-4}{(3x-4)^2}=4\times\frac{3x^2-8x+4}{(3x-4)^2}=\frac{4(3x-2)(x-2)}{(3x-4)^2}$$

$0<x<1$ の範囲で分母は正です。

x	0	・・・	2/3	・・・	1
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗	極大	↘	

$x=\frac{2}{3}$ のとき、$h(x)$は最大なので、

$$h\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}\left(12\times\frac{2}{3}+4+\frac{16}{3\times\frac{2}{3}-4}\right)=\frac{4}{9}\rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{9}{4}\rightarrow f=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{5}{2}=\frac{9}{16}+\frac{5}{2}$$
$$=\frac{49}{16}\ (3.0625)$$

$f(\theta)$の最小値は、$\frac{49}{16}$

問題 2

(1)

$3^n-2^n=3\times3^{n-1}-2\times2^{n-1}=(1+2)3^{n-1}-2\times2^{n-1}$
$\boldsymbol{=3^{n-1}+2(3^{n-1}-2^{n-1}})$

10 を法とする合同式で考えます。

・ n ＝1 のとき、$3^1-2^1\equiv 1$

・ n ＝2 のとき、$3^2-2^2\equiv 3^1+2(3^1-2^1)\equiv 3+2\times 1\equiv 5$

・ n ＝3 のとき、$3^3-2^3\equiv 3^2+2(3^2-2^2)\equiv 9+2\times 5\equiv 9$

・ n ＝4 のとき、$3^4-2^4\equiv 3^3+2(3^3-2^3)\equiv 7+2\times 9\equiv 5$

・ n ＝5 のとき、$3^5-2^5\equiv 3^4+2(3^4-2^4)\equiv 1+2\times 5\equiv 1$

となりもとに戻ります。

よって、余りは、 k を正の整数として、

n が偶数のとき、5

$n=4(k-1)+1$ のとき、1

$n=4(k-1)+3$ のとき、9

(2)10 を法とする値の表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3^n	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	周期4
2^n	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	周期4
4 n	4	8	2	6	0	4	8	2	6	0	周期5
3^n-2^n	1	5	9	5	1	5	9	5	1	5	周期4
3^n-2^n+4n	5	3	1	1	1	9	7	7	7	5	

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
3^n	7	1	3	9	7	1	3	9	7	1	3	周期4
2^n	8	6	2	4	8	6	2	4	8	6	2	周期4
4 n	4	8	2	6	0	4	8	2	6	0	4	周期5
3^n-2^n	9	5	1	5	9	5	1	5	9	5	1	周期4
3^n-2^n+4n	3	3	3	1	9	9	9	7	5	5	5	周期20

上の表より $r_n=7$ のところを見て、a_m の値を並べた表

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n (a_m)	7	8	9	18	27	28	29	38	47	48	49	58

「mod 20」でみると、「7, 8, 9, 18」の繰り返しです。

例えば、

9÷4＝2 余り 1 なので、1 番目の 7 に 20 を 2 個分加えて、$a_9=7+20\times 2=47$

12÷4＝3 ですが、これを「2 余り 4」と考えると、$a_{12}=18+20\times 2=58$ です。

よって、2024÷4＝506＝505 余り 4 として、$a_{2024}=18+20\times 505=10118$

問題 3

各点の座標を$P(p,p^2)$、$Q(q,q^2)$、$R(r,r^2)$ とします。

直線 PQ の傾きが 1 なので、

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\frac{(q+p)(q-p)}{q-p}=p+q=1\ \ (p\neq q)\ \ \rightarrow\ \ q=1-p$$

よって、

各点の座標は、$P(p,p^2)$、$Q(1-p,(1-p)^2)$、$R(r,r^2)$

線分 PQ の中点 M の座標は、

$$M\left(\frac{p+1-p}{2},\frac{p^2+(1-p)^2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1-2p+2p^2}{2}\right)$$

よって、線分 PQ の垂直二等分線 RM は、

$$y-\frac{1-2p+2p^2}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

点 R は直線 RM 上にあるので、

$$r^2-\frac{1-2p+2p^2}{2}=-\left(r-\frac{1}{2}\right)\ \ \rightarrow\ \ r^2+r-(1-p+p^2)=0$$

$$\rightarrow\ \ r=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(1-p+p^2)}}{2}\ \ \rightarrow\ \ r=\frac{-1-\sqrt{4p^2-4p+5}}{2}\ \ (\text{R は P の左})$$

よって、R の座標は、

$$R\left(\frac{-1-\sqrt{4p^2-4p+5}}{2},\frac{3+\sqrt{4p^2-4p+5}+2p^2-2p}{2}\right)$$

PQ の長さの 2 乗がa^2なので、

$$PQ^2=\{p-(1-p)\}^2+\{p^2-(1-p)^2\}^2=2(4p^2-4p+1)=a^2$$

$$\rightarrow\ \ 4p^2-4p+1=\frac{a^2}{2}\cdots\ \ (\#)$$

RQ の長さの 2 乗もa^2なので、

$$RQ^2=\left(p-\frac{-1-\sqrt{4p^2-4p+5}}{2}\right)^2+\left(p^2-\frac{3+\sqrt{4p^2-4p+5}+2p^2-2p}{2}\right)^2$$

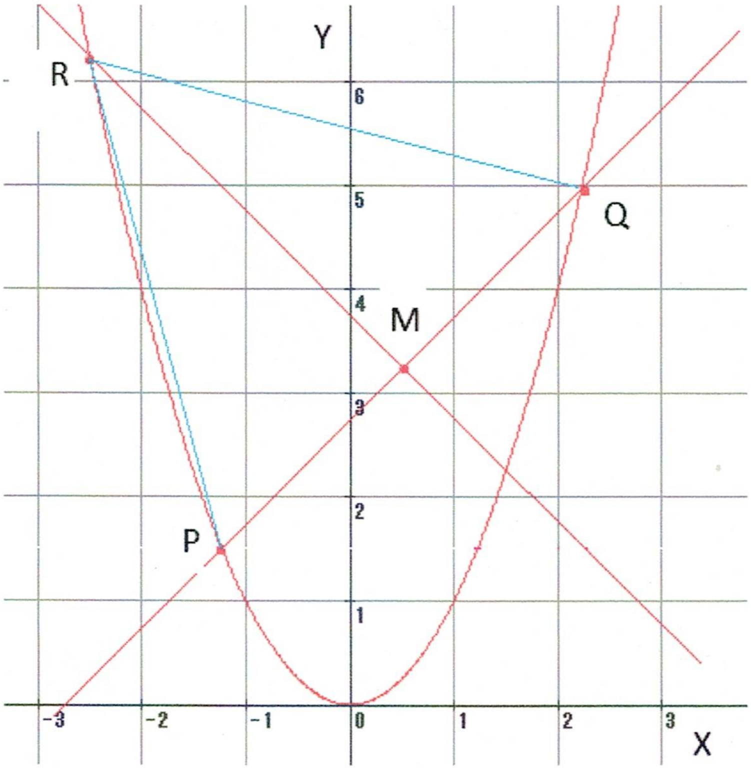
$$=\left(\frac{1+2p+\sqrt{4p^2-4p+5}}{2}\right)^2+\left(\frac{-3+2p-\sqrt{4p^2-4p+5}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(16p^2-16p+20+8\sqrt{4p^2-4p+5}\right)=4p^2-4p+5+2\sqrt{4p^2-4p+5}$$

$$=(4p^2-4p+1)+4+2\sqrt{(4p^2-4p+1)+4}=\frac{a^2}{2}+4+2\sqrt{\frac{a^2}{2}+4}=a^2$$

$$\rightarrow\ \ 2\sqrt{\frac{a^2}{2}+4}=\frac{a^2}{2}-4\ \ \rightarrow\ \ 4\left(\frac{a^2}{2}+4\right)=\frac{a^4}{4}-4a^2+16\ \ \rightarrow\ \ \frac{a^4}{4}-6a^2=0\ \ \rightarrow\ \ \frac{a^2}{4}(a^2-24)=0$$

$$\rightarrow\ \ a=0,\pm2\sqrt{6}\ \ \rightarrow\ \ a=2\sqrt{6}\ \ (a\text{は正})$$



追加問題 1

●各点の座標を次のようにします。

なお、点 A、B、C、D は前回 447 の追加問題 2 と同じです。

点 G は半径 1 の円周上にあります。

$A(a,0)$、$B(1,0)$、$C\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$、$D\left(\dfrac{1+a}{2},\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}\right)$、$E(x,y)$、$F(0,1)$、$G\left(g,\sqrt{1-g^2}\right)$

点 E の座標を、a を用いて表します。

E は線分ＣＤの垂直二等分線 ℓ 上にあります。

ＣＤの中点Ｍは、

$$M\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{1+a}{2}}{2},\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}}{2}\right)=M\left(\frac{1+2a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

CD の傾きは、

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{1+a}{2}-\frac{a}{2}}=\sqrt{3}-2\sqrt{3}a$$

よって ℓ は、

$$\ell: y-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{-1}{\sqrt{3}-2\sqrt{3}a}\left(x-\frac{1+2a}{4}\right) \rightarrow \ell: y=\frac{1}{\sqrt{3}(2a-1)}x+\frac{a-1}{\sqrt{3}(2a-1)} \quad \cdots \quad (ア)$$

EC と CD の長さが等しいので、

$$EC^2 = CD^2 \quad \rightarrow \quad \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2=\left(\frac{1+a}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad x^2-ax+y^2-\sqrt{3}ay+(-2a^2+3a-1)=0 \quad \cdots \quad (イ)$$

(ア)を(イ)に入れると、

$$x^2-ax+y^2-\sqrt{3}ay+(-2a^2+3a-1)=0$$

$$\rightarrow \quad x^2-ax+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}(2a-1)}x+\frac{a-1}{\sqrt{3}(2a-1)}\right\}^2-\sqrt{3}a\left\{\frac{1}{\sqrt{3}(2a-1)}x+\frac{a-1}{\sqrt{3}(2a-1)}\right\}+(-2a^2+3a-1)=0$$

$$\rightarrow \quad x^2-ax+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}(2a-1)}x+\frac{a-1}{\sqrt{3}(2a-1)}\right\}^2-\sqrt{3}a\left\{\frac{1}{\sqrt{3}(2a-1)}x+\frac{a-1}{\sqrt{3}(2a-1)}\right\}+(-2a^2+3a-1)=0$$

$$\rightarrow \quad \frac{4(3a^2-3a+1)}{3(2a-1)^2}x^2-\frac{2(6a^3-3a^2-a-1)}{3(2a-1)^2}x-\frac{2(12a^4-27a^3+22a^2-8a+1)}{3(2a-1)^2}=0$$

$$\rightarrow \quad \frac{2\times 2(3a^2-3a+1)}{3(2a-1)^2}x^2-\frac{2(3a^2-3a+1)(2a+1)}{3(2a-1)^2}x-\frac{2(3a^2-3a+1)(a-1)(4a-1)}{3(2a-1)^2}=0$$

$$\rightarrow \quad 2x^2-(2a+1)x-(a-1)(4a-1)=0$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{1}{4}\left\{(2a+1)\pm\sqrt{(2a+1)^2+8(a-1)(4a-1)}\right\}=\frac{1}{4}\left\{(2a+1)\pm\sqrt{9(1-2a)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(2a+1)\pm 3(1-2a)\}=\begin{cases}1-a \\ \dfrac{4a-1}{2}\end{cases}\left(a<\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad x=\frac{4a-1}{2}\left(x<\frac{1}{2}\right)$$

よって、

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}(2a-1)}x+\frac{a-1}{\sqrt{3}(2a-1)}=\frac{1}{\sqrt{3}(2a-1)}\times\frac{4a-1}{2}+\frac{a-1}{\sqrt{3}(2a-1)}=\frac{6a-3}{2\sqrt{3}(2a-1)}=\frac{3(2a-1)}{2\sqrt{3}(2a-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad E\left(\frac{4a-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

●E は線分 FG の垂直二等分線 n 上にあります。

FG の中点 N は、

$$N\left(\frac{0+g}{2},\frac{1+\sqrt{1-g^2}}{2}\right)=N\left(\frac{g}{2},\frac{1+\sqrt{1-g^2}}{2}\right)$$

FG の傾きは、

$$\frac{\sqrt{1-g^2}-1}{g-0}=\frac{\sqrt{1-g^2}-1}{g}$$

よって n は、

$$n: y-\frac{1+\sqrt{1-g^2}}{2}=\frac{-g}{\sqrt{1-g^2}-1}\left(x-\frac{g}{2}\right) \rightarrow n: y=\frac{g}{1-\sqrt{1-g^2}}x$$

点Eの座標を代入して、

$$y=\frac{g}{1-\sqrt{1-g^2}}x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{g}{1-\sqrt{1-g^2}}\times\frac{4a-1}{2} \rightarrow \boxed{\sqrt{3}\left(1-\sqrt{1-g^2}\right)=g(4a-1)}$$

→ 2乗して整理 → $2(4a^2-2a+1)g^2-\sqrt{3}(4a-1)g=0 \quad (g\neq 0)$

$$\rightarrow \quad g=\frac{\sqrt{3}(4a-1)}{2(4a^2-2a+1)} \quad \cdots \quad (ウ)$$

また、FEとFGの長さが等しいので、

$$FE^2=FG^2 \rightarrow \left(\frac{4a-1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2=(g-0)^2+\left(\sqrt{1-g^2}-1\right)^2$$

$$\rightarrow \quad 4a^2-2a+2-\sqrt{3}=2-2\sqrt{1-g^2} \rightarrow \sqrt{1-g^2}=\frac{\sqrt{3}+2a-4a^2}{2}$$

これを上の□の式に入れると、

$$\sqrt{3}\left(1-\sqrt{1-g^2}\right)=g(4a-1) \rightarrow \sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}+2a-4a^2}{2}\right)=g(4a-1)$$

$$\rightarrow \quad g=\frac{\sqrt{3}\left(4a^2-2a+2-\sqrt{3}\right)}{2(4a-1)} \quad \cdots \quad (エ)$$

(ウ)と(エ)を等しいとして、

$$\frac{\sqrt{3}(4a-1)}{2(4a^2-2a+1)}=\frac{\sqrt{3}\left(4a^2-2a+2-\sqrt{3}\right)}{2(4a-1)} \rightarrow \underline{\left(4a^2-2a+2-\sqrt{3}\right)\left(4a^2-2a+1\right)}=(4a-1)^2$$

$$\rightarrow \quad 16a^4-16a^3+\left(16-4\sqrt{3}\right)a^2+\left(-6+2\sqrt{3}\right)a+\left(2-\sqrt{3}\right)=16a^2-8a+1$$

$$\rightarrow \underline{\mathbf{16a^4-16a^3+\left(-4\sqrt{3}\right)a^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)a}}+\left(\mathbf{1-\sqrt{3}}\right)=0 \quad \cdots \quad (オ)$$

この式を因数分解します。

$(2\text{次式})^2-(\text{定数})^2$ の形で考えます。

元の式を考えて、

$(4a^2-2a+p)^2-q^2=16a^4-16a^3+(4+8p)a^2+(-4p)a+p^2-q^2$

としてみると、1次の項をみて、$p=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

定数項をみて、

$$p^2-q^2=1-\sqrt{3} \;\rightarrow\; \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2-q^2=1-\sqrt{3} \;\rightarrow\; q^2=\frac{3\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; q=\frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}{2}$$

よって、(オ)を解くと、

$$16a^4-16a^3+(-4\sqrt{3})a^2+(2+2\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})=(4a^2-2a+p)^2-q^2$$

$$=(4a^2-2a+p+q)(4a^2-2a+p-q)$$

$$=\left(4a^2-2a-\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}{2}\right)\left(4a^2-2a-\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}{2}\right)=0$$

$$\rightarrow\; a=\begin{cases}\begin{cases}\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}\right)^2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}}{4}(=1.1483\cdots)\\ \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{3+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}\right)^2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-\sqrt{3}}{4}(=-0.6483\cdots)\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-\sqrt{3}\right)^2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-\sqrt{3}}{4}(=0.2822\cdots)\\ \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{3+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-\sqrt{3}\right)^2}\right)=\frac{1-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}}{4}(=0.2177\cdots)\end{cases}\end{cases}$$

よって、a の値は、下の 2 つのどちらかです。

●ここで、点 G の座標を計算すると、

$a=\frac{1+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-\sqrt{3}}{4}$ のとき、

$$g=\frac{\sqrt{3}\left(4a^2-2a+2-\sqrt{3}\right)}{2(4a-1)} \;\rightarrow\; g=\frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{4}$$

$$\rightarrow\; \sqrt{1-g^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4+4\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}+6\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}$$

よって、G の座標は、

$$G\left(\frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{4},\frac{1}{4}\sqrt{4+4\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}+6\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\right)$$

$a=\frac{1-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}}{4}$ のとき、

$$g=\frac{\sqrt{3}\left(4a^2-2a+2-\sqrt{3}\right)}{2(4a-1)} \;\rightarrow\; g=\frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{4}$$

$$\rightarrow\; \sqrt{1-g^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4+4\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}+6\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}$$

よって、G の座標は、

$$G\left(\frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{4},\frac{1}{4}\sqrt{4+4\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}+6\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\right)$$

各点の座標と三角形の 1 辺を概算してみると、

a=	0.2823				
O(	0.0000 ,	0.0000)		
A(	0.2823 ,	0.0000)	OA= 0.2823	OC= 0.2823
B(	1.0000 ,	0.0000)	AB= 0.7177	AC= 0.7177
C(	0.1411 ,	0.2445)		
D(	0.6411 ,	0.6216)	CD= 0.6263	EC= 0.6263
E(	0.0646 ,	0.8660)		
F(	0.0000 ,	1.0000)	FG= 0.1487	FE= 0.1487
G(	0.1483 ,	0.9889)		

a=	0.2177			
O(	0.0000 ,	0.0000)		
A(	0.2177 ,	0.0000)	OA= 0.2177	OC= 0.2177
B(	1.0000 ,	0.0000)	AB= 0.7823	AC= 0.7823
C(	0.1089 ,	0.1885)		
D(	0.6089 ,	0.6775)	CD= 0.6993	EC= 0.6993
E(	-0.0646 ,	0.8660)		
F(	0.0000 ,	1.0000)	FG= 0.1487	FE= 0.1487
G(	-0.1483 ,	0.9889)		

以上から、

$$a=\frac{1+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-\sqrt{3}}{4}$$

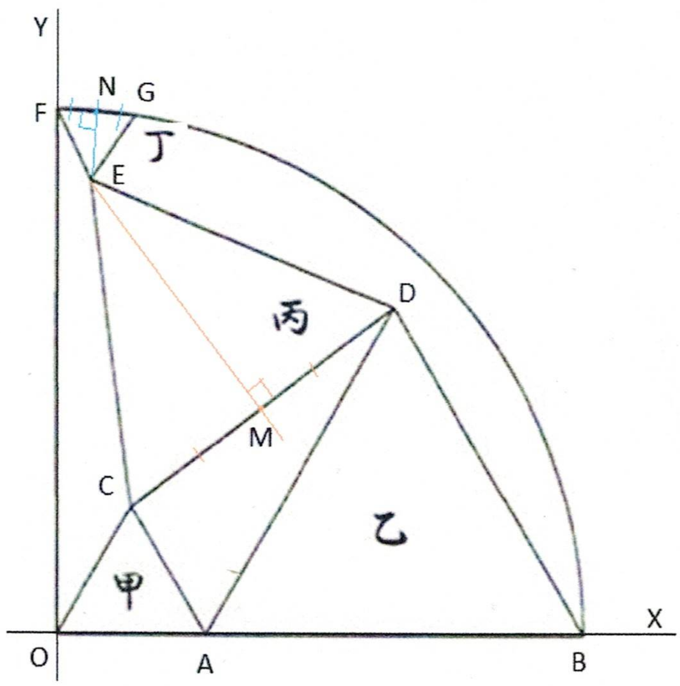
点 G の座標は、

$$G\left(\frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{4},\frac{1}{4}\sqrt{4+4\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}+6\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}\right)$$

●よって、各三角形の辺の長さは、

甲 $a=\frac{1+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-\sqrt{3}}{4}$、乙 $1-a=\frac{3-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}}{4}$、

丙 $CD=\frac{\sqrt{16+12\sqrt{3}-6\sqrt{2}\sqrt[4]{3}-6\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}}{4}$、丁 $EF=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt[4]{3}}}{2}$



追加問題 2

正 7 角形の 1 内角の大きさは、$\frac{180°\times5}{7}=\frac{900°}{7}(128.\cdots°)$ です。

円に内接するので、頂点 A から対角線を引きます。

1 辺にたつ円周角の大きさは、1 内角の 5 分の 1 の大きさです。

この角を θ とおきます。

図で見やすく(●)で表します。

$\theta = \dfrac{900°}{7} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{180°}{7}$

(1)∠BAD=2θ、△ABK≡△DCL なので、

$AD = AK + KL + LD = AB\cos 2\theta + BC + CD\cos 2\theta = 1 + 2\cos 2\theta = 1 + 2\cos\dfrac{360°}{7}$

(2)180° =7θなので、直角は $90° = \frac{7\theta}{2}$ です。

よって、$\angle DAH = \frac{3\theta}{2}$、$\angle FAH = \frac{\theta}{2}$、$\angle DFH = \theta$ です。

三角形 DHJ は直角三角形です。

よって、

$$DH^2 = DJ^2 + JH^2 \quad \rightarrow \quad DH^2 = \left(AD\sin\frac{3\theta}{2}\right)^2 + (FJ\tan\theta)^2$$

$$= \left\{(1+2\cos 2\theta)\sin\frac{3\theta}{2}\right\}^2 + \left\{\left(AF\sin\frac{\theta}{2}\right)\tan\theta\right\}^2$$

$$= \left\{(1+2\cos 2\theta)\sin\left(\frac{7\theta}{2} - 2\theta\right)\right\}^2 + \left[\left\{2\cos\theta \times \sin\left(\frac{7\theta}{2} - 3\theta\right)\right\}\tan\theta\right]^2$$

$$= \left\{(1+2\cos 2\theta)\left(\sin\frac{7\theta}{2}\cos 2\theta - \cos\frac{7\theta}{2}\sin 2\theta\right)\right\}^2 + \left\{2\sin\theta\left(\sin\frac{7\theta}{2}\cos 3\theta - \cos\frac{7\theta}{2}\sin 3\theta\right)\right\}^2$$

$$= \{(1+2\cos 2\theta)(\cos 2\theta)\}^2 + \{2\sin\theta(\cos 3\theta)\}^2 = (\cos 2\theta + 2\cos^2 2\theta)^2 + (\sin 4\theta - \sin 2\theta)^2$$

$$= (\cos 2\theta + 2\cos^2 2\theta)^2 + (2\sin 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta)^2$$

$$= \underline{\cos^2 2\theta} + 4\cos^3 2\theta + 4\underline{\cos^4} 2\theta + 4\underline{\sin^2 2\theta}\cos^2 2\theta - 4\sin^2 2\theta\cos 2\theta + \underline{\sin^2 2\theta}$$

$$= 1 + 4\cos^2 2\theta + 4\cos 2\theta(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) = 1 + 4\cos^2 2\theta + 4\cos 2\theta(2\cos^2 2\theta - 1)$$

$$\mathbf{= 1 - 4\cos 2\theta + 4\cos^2 2\theta + 8\cos^3 2\theta \quad \cdots \quad (1)}$$

ここで試しに、電卓で計算してみると(1)の値が 2 になります。

そこで確かめるため、倍角の公式を考えてみます。

その際、180° =7θなので、6θと8θの余弦の値が等しいことに注目します。

$\cos(3\cdot 2\theta) = 4\cos^3 2\theta - 3\cos 2\theta$

$\cos(4\cdot 2\theta) = 2\cos^2(2\cdot 2\theta) - 1 = 2(2\cos^2 2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 2\theta - 8\cos^2 2\theta + 1$

右辺が互いに等しいとすると、

$8\cos^4 2\theta - 8\cos^2 2\theta + 1 = 4\cos^3 2\theta - 3\cos 2\theta$

$\rightarrow \quad 8\cos^4 2\theta - 4\cos^3 2\theta - 8\cos^2 2\theta + 3\cos 2\theta + 1 = 0$

$\rightarrow \quad (\cos 2\theta - 1)(8\cos^3 2\theta + 4\cos^2 2\theta - 4\cos 2\theta - 1) = 0 \quad (2\theta \neq 0)$
$\rightarrow \quad 8\cos^3 2\theta + 4\cos^2 2\theta - 4\cos 2\theta - 1 = 0$

よって、$8\cos^3 2\theta + 4\cos^2 2\theta - 4\cos 2\theta = 1$ なので、(1)の値は$DH^2 = \mathbf{2}$となります。

ゆえに、$DH = \sqrt{2} = 2\cos 45°$

(3)

$$AH = AJ + JH = AF\sin 3\theta + (\sin 4\theta - \sin 2\theta) = 2\sin\theta\sin 3\theta + (\sin 4\theta - \sin 2\theta)$$
$$= \sin 4\theta - \sin 2\theta + \sin 4\theta - \sin 2\theta = 2\sin 4\theta = 2\sin\left(\frac{7\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{7\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{7\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{90°}{7}$$