問題1　$\cos\theta = x$、$\sin\theta = y$とすると、与式は次のように変換できます。

$$与式 = \left(y + \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16x^2} + y^2 + \frac{1}{4y^2} + \frac{3}{2}$$

ここで、$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$なので、

$$与式 = x^2 + \frac{1}{16x^2} + y^2 + \frac{1}{4y^2} + \frac{3}{2} = x^2 + \frac{1}{16x^2} + 1 - x^2 + \frac{1}{4(1 - x^2)} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{40x^4 - 43x^2 - 1}{16x^2(x^2 - 1)}$$

上式を$g(x)$として、xで微分すると、

$$g(x)' = \frac{160x^3 - 86x}{16x^4 - 16x^2} - \frac{(64x^3 - 32x)(40x^4 - 43x^2 - 1)}{(16x^4 - 16x^2)^2} = \frac{(x^2 + 1)(3x^2 - 1)}{8(x - 1)^2 x^3 (x + 1)^2}$$

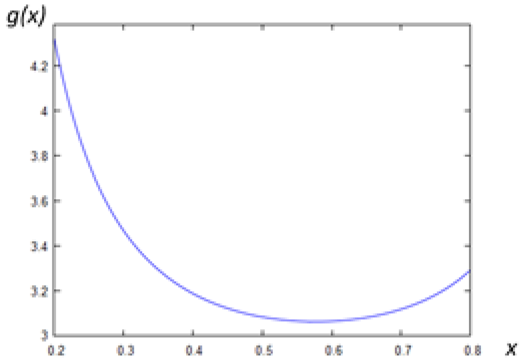
なので、

$$g(x)' = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

です。$0 < x < 1$の範囲で増減表を作成すると、以下のようになります。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g(x)'$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	∞	↘	$\frac{49}{16}$	↗	∞

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$のとき、$g(x)$は最小値$\frac{49}{16}$です。



以上より、$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$のとき、$f(\theta)$は最小値$\frac{49}{16}$をとります。

問題2

(1) 3^nの下1桁は、3,9,7,1の繰り返しで、2^nは2,4,8,6の繰り返しです。どちらも位数が4なので、3^n-2^nは1,5,9,5の繰り返しとなります。よって、mを正の整数として、次のように表すことができます。

$$3^n-2^n\text{を 10 で割った余り} = \begin{cases} 1 & (n=4m-3) \\ 5 & (n=4m-2) \\ 9 & (n=4m-1) \\ 5 & (n=4m) \end{cases}$$

(2) 4nの下1桁は、位数が5で4,8,2,6,0の繰り返しなので、3^n-2^n+4nは位数が$4\times5=20$で、5,3,1,1,1,9,7,7,7,5,3,3,3,1,9,9,9,7,5,5の繰り返しとなります。この中で、7は4個あって、7,8,9,18番目に現れます。そして、$2024=4\times506$なので、

$a_{2024}=20\times(506-1)+18=10118$

となります。

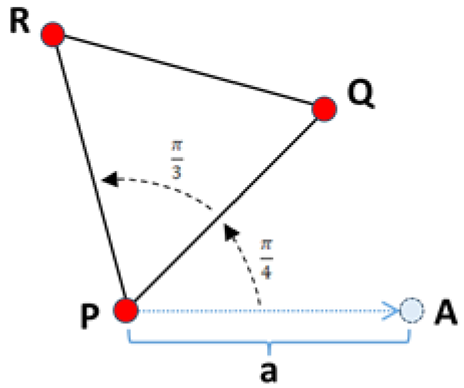
問題3

右図のように、Pからx軸方向にa移動した点をAとします。

すると、QはAをPの周りに$\frac{\pi}{4}$回転させた点です。

さらに、RはQをPの周りに$\frac{\pi}{3}$回転させた点です。

Pは$y=x^2$上の点なので(p, p^2)と表すことができるので、
Q、Rは次のように求まります。



$$Q = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ p^2 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} p \\ p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \frac{a}{\sqrt{2}} \\ p^2 + \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} p + \frac{a}{\sqrt{2}} \\ p^2 + \frac{a}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ p^2 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} p \\ p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)a}{4} \\ p^2 + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)a}{4} \end{bmatrix}$$

ここで、Q、Rもまた$y=x^2$上の点なので、

$$p^2 + \frac{a}{\sqrt{2}} = \left(p + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow 2\sqrt{2}p + a - \sqrt{2} \cdots ①$$

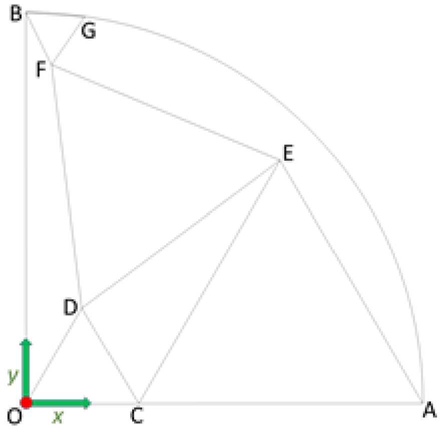
$$p^2 + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)a}{4} = \left(p - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)a}{4}\right)^2 \Rightarrow 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)p + \left(\sqrt{3}-2\right)a + \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) \cdots ②$$

です。①②を解くと、

$$(a, p) = \left(2\sqrt{6}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)$$

です。以上より、aの値は$2\sqrt{6}$です。

追加問題1　よいアイデアが浮かばず、安易な方法でアプローチしました。



左図のように座標系を導入して、各正三角形の頂点に記号を付けます。甲の一辺の長さをaとすると、

　$O(0,0), A(0,1), B(1,0), C(a,0)$

です。

DはCをOの回りに、EはAをCの回りに、FはEをDの回りに、GはFをBの回りに、それぞれ$\frac{\pi}{3}$だけ回転させた点なので、次のように表すことができます。

$$D=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a}{2}\\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a+1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}\frac{a+1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{a}{2}\\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}\frac{a}{2}\\ \frac{\sqrt{3}a}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4a-1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}\frac{4a-1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2a+\sqrt{3}-2}{2}\\ \frac{2\sqrt{3}a+1}{2}\end{bmatrix}$$

ここで、線分OGの長さが1なので、

$$|OG|^2=1^2\Rightarrow\left(\frac{2a+\sqrt{3}-2}{2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}a+1}{2}\right)^2=1^2\Rightarrow 4a^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)a-\sqrt{3}+1=0$$

です。これを解いて、

$$a=\frac{1\pm\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}}{4}$$

ですが、$a>0$なので、$a=\frac{1+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}}{4}$が適切です。

後は芋づる式に各三角形の辺の長さを求めると、

$$|\mathrm{BC}| = \left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathrm{a}\\0\end{pmatrix}\right| = 1 - \mathrm{a} = \frac{3 - \sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{4}$$

$$|\mathrm{DE}| = \left|\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{a}+1}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}(1-\mathrm{a})}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{a}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}\mathrm{a}}{2}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3\mathrm{a}^2 - 3\mathrm{a} + 1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{8 - \sqrt{3}(\sqrt{2}3^{\frac{5}{4}} - 6) - \sqrt{2}3^{\frac{5}{4}}}}{4}$$

$$|\mathrm{BF}| = \left|\begin{pmatrix}\dfrac{4\mathrm{a}-1}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4\mathrm{a}^2 - 2\mathrm{a} - \sqrt{3} + 2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 - (\sqrt{2}3^{\frac{1}{4}} + 1)\sqrt{3}}}{2}$$

です。以上より、各正三角形の1辺の長さは、以下の通りです。

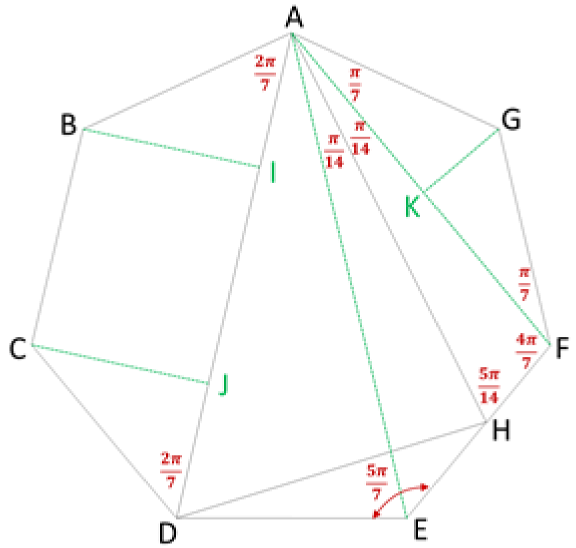
甲の1辺の長さ$= \dfrac{1 + \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{4} = 0.2822897276588306\cdots$

乙の1辺の長さ$= \dfrac{3 - \sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{4} = 0.7177102723411695\cdots$

丙の1辺の長さ$= \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{8 - \sqrt{3}(\sqrt{2}3^{\frac{5}{4}} - 6) - \sqrt{2}3^{\frac{5}{4}}}}{4} = 0.6262533736824081\cdots$

丁の1辺の長さ$= \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{5 - (\sqrt{2}3^{\frac{1}{4}} + 1)\sqrt{3}}}{2} = 0.1487269258750676\cdots$

追加問題2



左図のように、B、CからADに垂直に下した点をI、Jとし、GからAFに垂直に下した点をKとします。
そして、判明している角度を書き入れます。

(1)

$$AD = AI + IJ + JD$$
$$= AB\cos\frac{2\pi}{7} + BC + CD\cos\frac{2\pi}{7}$$
$$= 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

(2) ⊿AGFに着目すると、

$$AF = AK + KF = AG\cos\frac{\pi}{7} + FG\cos\frac{\pi}{7} = 2\cos\frac{\pi}{7}$$

です。次に、⊿AEFに着目すると、∠EAH = ∠FAHなので、

$$AE : AF = EH : FH \Rightarrow AD : AF = EH : EF - EH \Rightarrow EH = \frac{AD \cdot EF}{AD + AF} = \frac{2\cos\frac{2\pi}{7} + 1}{2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{\pi}{7} + 1}$$

です。⊿DEHに余弦定理を適用して、

$$\frac{DE^2 + EH^2 - DH^2}{2DE \cdot EH} = \cos\frac{5\pi}{7} \Rightarrow \frac{1^2 + \left(\frac{2\cos\frac{2\pi}{7} + 1}{2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{\pi}{7} + 1}\right)^2 - DH^2}{2 \cdot \frac{2\cos\frac{2\pi}{7} + 1}{2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{\pi}{7} + 1}} = -\cos\frac{2\pi}{7}$$

$\Rightarrow DH^2 = 2$ (計算過程は汚いので、補足1に記載)

$$\Rightarrow DH = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$$

となります。

(3) ⊿AHFに正弦定理を適用すると、

$$\frac{AE}{\sin\frac{9\pi}{14}} = \frac{AH}{\sin\frac{2\pi}{7}} \Rightarrow \frac{AD}{\sin\frac{9\pi}{14}} = \frac{AH}{\sin\frac{2\pi}{7}} \Rightarrow AH = \frac{\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{9\pi}{14}}$$

$\Rightarrow AH = 2\cos\frac{\pi}{14}$ (計算過程は汚いので、補足2に記載)

となります。

補足1 計算過程

数式を扱い易くするために、$\alpha=\frac{\pi}{14}$とすると、

$$\frac{1^2+\left\{\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}+1}{2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{7}+1}\right\}^2-DH^2}{2\cdot\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}+1}{2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{7}+1}}=-\cos\frac{2\pi}{7}\Rightarrow\frac{1^2+\left\{\frac{2\cos(4\alpha)+1}{2\cos(4\alpha)+2\cos(2\alpha)+1}\right\}^2-DH^2}{2\cdot\frac{2\cos(4\alpha)+1}{2\cos(4\alpha)+2\cos(2\alpha)+1}}=-\cos(4\alpha)$$

となります。

これを解けばよいのですが、シンプルなやり方が浮かばないので、愚直にやりました。
補足3のn倍角の公式で、$\cos(\alpha)$の多項式にすると、

$$\begin{aligned}DH^2&=\frac{8\cos(4\alpha)^3+8\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)^2+16\cos(4\alpha)^2+12\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)+10\cos(4\alpha)+4\cos(2\alpha)^2+4\cos(2\alpha)+2}{4\cos(4\alpha)^2+8\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)+4\cos(4\alpha)+4\cos(2\alpha)^2+4\cos(2\alpha)+1}\\&=\frac{8(8\cos(\alpha)^4-8\cos(\alpha)^2+1)^3+(8(2\cos(\alpha)^2-1)+16)(8\cos(\alpha)^4-8\cos(\alpha)^2+1)^2+4(2\cos(\alpha)^2-1)^2+(12(2\cos(\alpha)^2-1)+10)(8\cos(\alpha)^4-8\cos(\alpha)^2+1)+4(2\cos(\alpha)^2-1)+2}{4(8\cos(\alpha)^4-8\cos(\alpha)^2+1)^2+4(2\cos(\alpha)^2-1)^2+(8(2\cos(\alpha)^2-1)+4)(8\cos(\alpha)^4-8\cos(\alpha)^2+1)+4(2\cos(\alpha)^2-1)+1}\\&=\frac{4096\cos(\alpha)^{12}-11264\cos(\alpha)^{10}+12288\cos(\alpha)^8-6720\cos(\alpha)^6+1920\cos(\alpha)^4-272\cos(\alpha)^2+16}{256\cos(\alpha)^8-384\cos(\alpha)^6+176\cos(\alpha)^4-24\cos(\alpha)^2+1}\end{aligned}$$

です。

次に、補足4の式で次数を4以下に下げます。

$$\begin{aligned}DH^2&=\frac{4096\cos(\alpha)^{12}-11264\cos(\alpha)^{10}+12288\cos(\alpha)^8-6720\cos(\alpha)^6+1920\cos(\alpha)^4-272\cos(\alpha)^2+16}{256\cos(\alpha)^8-384\cos(\alpha)^6+176\cos(\alpha)^4-24\cos(\alpha)^2+1}\\&=\frac{4096\cdot\frac{5096\cos(\alpha)^4-3822\cos(\alpha)^2+539}{2048}-11264\cdot\frac{2464\cos(\alpha)^4-1764\cos(\alpha)^2+245}{1024}+12288\cdot\frac{560\cos(\alpha)^4-364\cos(\alpha)^2+49}{256}-6720\cdot\frac{112\cos(\alpha)^4-56\cos(\alpha)^2+7}{64}+1920\cos(\alpha)^4-272\cos(\alpha)^2+16}{256\cdot\frac{560\cos(\alpha)^4-364\cos(\alpha)^2+49}{256}-384\cdot\frac{112\cos(\alpha)^4-56\cos(\alpha)^2+7}{64}+176\cos(\alpha)^4-24\cos(\alpha)^2+1}\\&=\frac{128\cos(\alpha)^4-104\cos(\alpha)^2+16}{64\cos(\alpha)^4-52\cos(\alpha)^2+8}\\&=2\end{aligned}$$

補足2 計算過程

こちらも、補足1と同様に計算します。$\alpha=\frac{\pi}{14}$とすると、

$$\mathrm{AH}=\frac{\left(1+2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{9\pi}{14}} \Rightarrow \mathrm{AH}=\frac{\{2\cos(4\alpha)+1\}\sin(4\alpha)}{\sin(9\alpha)}$$

となります。

補足3のn倍角の公式で、$\cos(\alpha)$の多項式にすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=\frac{\sin(\alpha)\{-128\cos(\alpha)^5\sin(\alpha)^2+128\cos(\alpha)^3\sin(\alpha)^2-24\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2+64\cos(\alpha)^5-64\cos(\alpha)^3+12\cos(\alpha)\}}{\sin(\alpha)\{256\sin(\alpha)^8-576\sin(\alpha)^6+432\sin(\alpha)^4-120\sin(\alpha)^2+9\}}\\&=\frac{-128\cos(\alpha)^5\sin(\alpha)^2+128\cos(\alpha)^3\sin(\alpha)^2-24\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2+64\cos(\alpha)^5-64\cos(\alpha)^3+12\cos(\alpha)}{256\sin(\alpha)^8-576\sin(\alpha)^6+432\sin(\alpha)^4-120\sin(\alpha)^2+9}\end{aligned}$$

です。$\sin(\alpha)\Rightarrow\cos(\alpha)$に変換すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=\frac{-128\cos(\alpha)^5\{1-\cos(\alpha)^2\}+128\cos(\alpha)^3\sin(\alpha)^2-24\cos(\alpha)\{1-\cos(\alpha)^2\}+64\cos(\alpha)^5-64\cos(\alpha)^3+12\cos(\alpha)}{256\{1-\cos(\alpha)^2\}^4-576\{1-\cos(\alpha)^2\}^3+432\{1-\cos(\alpha)^2\}^2-120\{1-\cos(\alpha)^2\}+9}\\&=\frac{32\cos(\alpha)^5-40\cos(\alpha)^3+12\cos(\alpha)}{64\cos(\alpha)^6-96\cos(\alpha)^4+36\cos(\alpha)^2-1}\end{aligned}$$

です。

次に、補足4の式で次数を下げます。

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=\frac{32\cos(\alpha)^5-40\cos(\alpha)^3+12\cos(\alpha)}{64\cdot\frac{112\cos(\alpha)^4-56\cos(\alpha)^2+7}{64}-96\cos(\alpha)^4+36\cos(\alpha)^2-1}\\&=\frac{32\cos(\alpha)^5-40\cos(\alpha)^3+12\cos(\alpha)}{16\cos(\alpha)^4-20\cos(\alpha)^2+6}\\&=2\cos(\alpha)\\&=2\cos\frac{\pi}{14}\end{aligned}$$

補足3 n倍角の公式

$$\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$$
$$\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)$$
$$\cos(4\theta) = 8\cos(\theta)^4 - 8\cos(\theta)^2 + 1$$
$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta)$$
$$\cos(6\theta) = 32\cos(\theta)^6 - 48\cos(\theta)^4 + 18\cos(\theta)^2 - 1$$
$$\cos(7\theta) = 64\cos(\theta)^7 - 112\cos(\theta)^5 + 56\cos(\theta)^3 - 7\cos(\theta)$$
$$\cos(8\theta) = 128\cos(\theta)^8 - 256\cos(\theta)^6 + 160\cos(\theta)^4 - 32\cos(\theta)^2 + 1$$
$$\cos(9\theta) = 256\cos(\theta)^9 - 576\cos(\theta)^7 + 432\cos(\theta)^5 - 120\cos(\theta)^3 + 9\cos(\theta)$$
$$\cos(10\theta) = 512\cos(\theta)^{10} - 1280\cos(\theta)^8 + 1120\cos(\theta)^6 - 400\cos(\theta)^4 + 50\cos(\theta)^2 - 1$$

$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$
$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin(\theta)^3$$
$$\sin(4\theta) = \cos(\theta)\,(4\sin(\theta) - 8\sin(\theta)^3)$$
$$\sin(5\theta) = 16\sin(\theta)^5 - 20\sin(\theta)^3 + 5\sin(\theta)$$
$$\sin(6\theta) = \cos(\theta)\,(32\sin(\theta)^5 - 32\sin(\theta)^3 + 6\sin(\theta))$$
$$\sin(7\theta) = -64\sin(\theta)^7 + 112\sin(\theta)^5 - 56\sin(\theta)^3 + 7\sin(\theta)$$
$$\sin(8\theta) = \cos(\theta)\,(-128\sin(\theta)^7 + 192\sin(\theta)^5 - 80\sin(\theta)^3 + 8\sin(\theta))$$
$$\sin(9\theta) = 256\sin(\theta)^9 - 576\sin(\theta)^7 + 432\sin(\theta)^5 - 120\sin(\theta)^3 + 9\sin(\theta)$$
$$\sin(10\theta) = \cos(\theta)\,(512\sin(\theta)^9 - 1024\sin(\theta)^7 + 672\sin(\theta)^5 - 160\sin(\theta)^3 + 10\sin(\theta))$$

補足4 次数を下げる

補足3の７倍角の公式を使って、

$$\begin{aligned}\cos(7\alpha) &= 64\cos(\alpha)^7 - 112\cos(\alpha)^5 + 56\cos(\alpha)^3 - 7\cos(\alpha)\\ &= \cos(\alpha)\{64\cos(\alpha)^6 - 112\cos(\alpha)^4 + 56\cos(\alpha)^2 - 7\}\end{aligned}$$

ここで、$\alpha = \frac{\pi}{14}$とすると、$\cos(7\alpha) = 0$、$\cos(\alpha) \neq 0$なので、

$$64\cos(\alpha)^6 - 112\cos(\alpha)^4 + 56\cos(\alpha)^2 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha)^6 = \frac{112\cos(\alpha)^4 - 56\cos(\alpha)^2 + 7}{64}$$

です。さらに、

$$\cos(\alpha)^8 = \cos(\alpha)^2\cos(\alpha)^6 = \frac{560\cos(\alpha)^4 - 364\cos(\alpha)^2 + 49}{256}$$

$$\cos(\alpha)^{10} = \cos(\alpha)^2\cos(\alpha)^8 = \frac{2464\cos(\alpha)^4 - 1764\cos(\alpha)^2 + 245}{1024}$$

$$\cos(\alpha)^{12} = \cos(\alpha)^2\cos(\alpha)^{10} = \frac{5096\cos(\alpha)^4 - 3822\cos(\alpha)^2 + 539}{2048}$$

となります。これらは、次数を下げるときに使います。