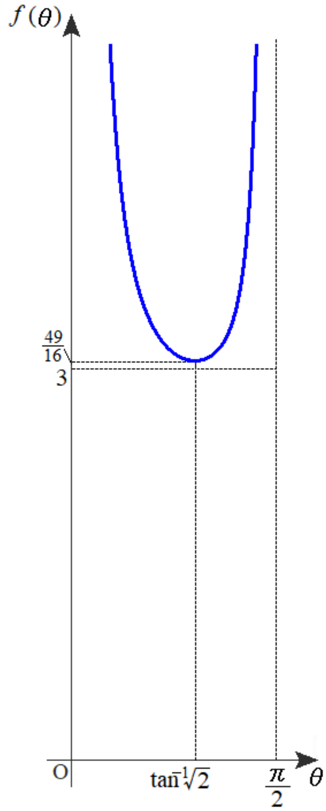
● 問題 448 解答＜三角定規＞



[問題１]

$$f(\theta)=\left(\sin\theta+\frac{1}{2\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\frac{1}{4\cos\theta}\right)^2$$

$$=\sin^2\theta+1+\frac{1}{4\sin^2\theta}+\cos^2\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{16\cos^2\theta}$$

$$=\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)+\frac{1+\tan^2\theta}{16}=\frac{45}{16}+\frac{\tan^2\theta}{16}+\frac{1}{4\tan^2\theta}$$

$$\geqq\frac{45}{16}+2\sqrt{\frac{\tan^2\theta}{16}\cdot\frac{1}{4\tan^2\theta}}=\frac{49}{16}$$

等号は $\frac{\tan^2\theta}{16}=\frac{1}{4\tan^2\theta}$, $\tan^4\theta=4$ ∴ $\tan\theta=\sqrt{2}$

$\theta=\tan^{-1}\sqrt{2}$ $(=0.955\cdots)$ のとき成立。

以上より，求める $f(\theta)$ の最小値は $f(\tan^{-1}\sqrt{2})=\boldsymbol{\frac{49}{16}}$ …[答]

[問題２]

(1) $f(n)=3^n-2^n$ とおく。$f(n)$ を10で割った余りを $g(n)$ とすると

$f(1)=1$, $g(1)=1$。$f(2)=5$, $g(2)=5$。$f(3)=19$, $g(3)=9$。$f(4)=65$, $g(4)=5$。

また，

$$f(n+4)-f(n)=3^{n+4}-2^{n+4}-(3^n-2^n)$$
$$=81\cdot3^n-16\cdot2^n-3^n+2^n$$
$$=80\cdot3^n-15\cdot2^n$$
$$=10(8\cdot3^n-3\cdot2^{n-1})$$

であるから，$g(n+4)=g(n)$。

以上より，求める余りは，

$$\left.\begin{array}{ll}(\text{i})\ n=4k\ (k\geqq1) & \text{のとき，}\mathbf{5}\\ (\text{ii})\ n=4k+1\ (k\geqq0) & \text{のとき，}\mathbf{1}\\ (\text{iii})\ n=4k+2\ (k\geqq0) & \text{のとき，}\mathbf{5}\\ (\text{iv})\ n=4k+3\ (k\geqq0) & \text{のとき，}\mathbf{9}\end{array}\right\}\cdots[答]$$

(2) $4(n+5)-4n=20\equiv0\pmod{10}$

であるから，$4n$ を10で割った余りは，周期5で繰り返される。

(1)の結果とあわせ，3^n-2^n+4n を10で割った余りは周期20で繰り返す。

20個の余りを列挙すると

5, 3, 1, 1, 1, 9, 7, 7, 7, 5, 3, 3, 3, 1, 9, 9, 9, 7, 5, 5

で，7が4個含まれるから，$2024=506\times4$ より a_{2024} は506周期目の最後の7(18項目)で，

$a_{2024}=(506-1)\times20+18=\mathbf{10118}$ …[答]

[問題３]

$y=x^2$ …①

図のようにP, Q, R, Sを定め，$P(t,\ t^2)$ ($t<0$) とすると

直線 PQ: $y-t^2=x-t$ …②

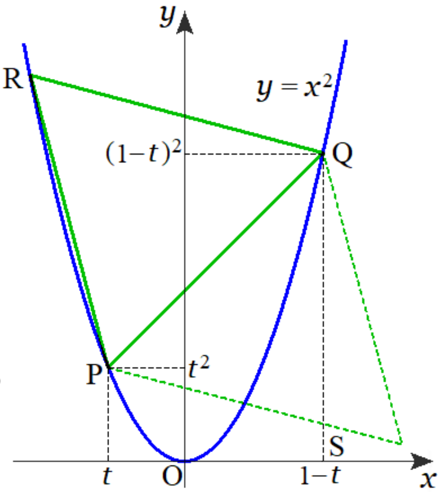
①と②の交点を求める。

$x^2-t^2=x-t \quad \therefore\ (x-t)(x+t-1)=0 \quad \therefore\ x=1-t$

よってQの座標は $Q(1-t,\ (1-t)^2)$ で，$\overrightarrow{PQ}=(1-2t,\ 1-2t)$

Rは，Pを中心にQを反時計回りに60°回転させた点だから

(∠PQS＝45° だから，時計回りに 60° 回転させた点が①上にあることはない)



$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2t\\ 1-2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-\sqrt{3})(1-2t)/2+t\\ (1+\sqrt{3})(1-2t)/2+t^2\end{pmatrix}$$

↑ Rの座標

Rが①上にあることから

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-2t)+t\right)^2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-2t)+t^2$$

これを整理して

$4t^2+4(\sqrt{3}-1)t+1-2\sqrt{3}=(2t-1)(2t-1+2\sqrt{3})=0$

$t<0$ より，$t=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

このとき，正三角形の一辺 a は，$a=1-2t=\mathbf{2\sqrt{3}}$ …[答]

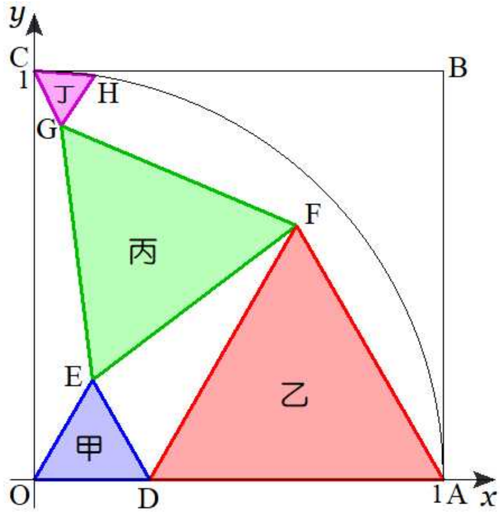
＜追加問題＞

[問題１]

図のように座標軸および各点を定める。

Dの座標を $D(a,\ 0)$ とすると，E, F は $E\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,

$F\left(\dfrac{1}{2}(1+a),\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-a)\right)$。 $\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-2a)\right)$ をEを中心に反時計回りに60° 回転させると，



$$\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{OE}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}(1-2a)/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a/2\\ \sqrt{3}a/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

よって，$G\left(2a-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\left(\dfrac{1}{2}-2a,\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{GC}$ をGを中心に時計回りに60° 回転させると

$$\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{OG}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2-2a\\ 1-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2a-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\sqrt{3}/2-1\\ \sqrt{3}\,a+1/2\end{pmatrix}$$

よって $\mathrm{H}\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\ \sqrt{3}\,a+\frac{1}{2}\right)$ で，これが円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上にあるから

$$\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\,a+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

整理して　$4a^2-2(1-\sqrt{3})a+1-\sqrt{3}=0$　∴ $a=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}+1}{4}$　$(a>0)$

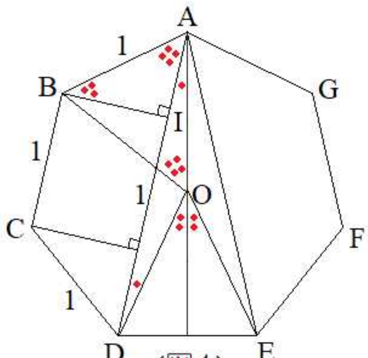
この結果をそれぞれに戻し，求めるそれぞれの一辺は，

甲：$\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}+1}}{\boldsymbol{4}}$　$(=0.2822\cdots)$，　乙：$\dfrac{\boldsymbol{3+\sqrt{3}-\sqrt{3\sqrt{2}}}}{\boldsymbol{4}}$　$(=0.7177\cdots)$

丙：$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{4+3\sqrt{3}-3\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}$　$(=0.6262\cdots)$，　丁：$\boldsymbol{\sqrt{\frac{1}{2}(5-3\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot 3^{3/4}}}$　$(=0.1487\cdots)$

…[答]

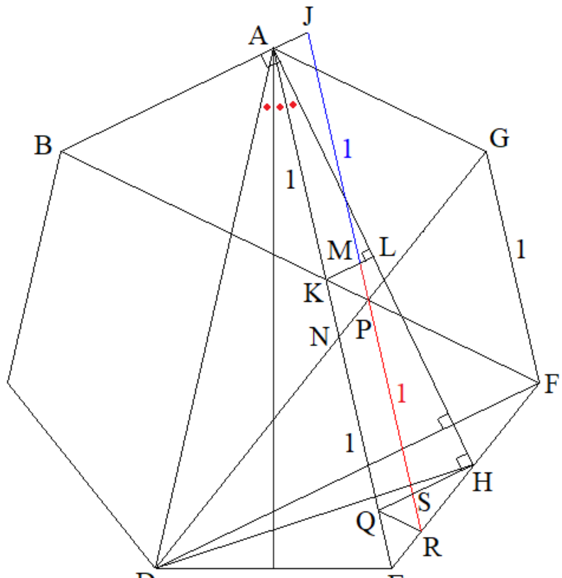
［問題２］



〈図1〉

(1) 左<図１>において，$\color{red}{\bullet}=\dfrac{\pi}{14}$ として，それぞれの角が図のようになる。

よって，$\angle\mathrm{BAI}=\dfrac{2\pi}{7}$　で，$\mathrm{AD}=1+2\cos\dfrac{2\pi}{7}$　よって，$\square=\boldsymbol{\dfrac{2\pi}{7}}$　…[答]



〈図２〉

(3) 右<図２>において，J は BA の延長上の点，KL⊥AH，QH⊥AH，JR // AE とする。

□AKFG，□AKMJ は平行四辺形だから，JM＝1 (青線)

□NEFG，□NERP は平行四辺形だから，PR＝1 (赤線)

□KQSM は平行四辺形だから，△KPM≡△QRS

∴ PM＝RS　∴ MS＝1 (赤線)

□AQSJ は平行四辺形だから　AQ＝JS＝2

$\angle\mathrm{EAH}=\dfrac{\pi}{14}$　だから，　$\mathrm{AH}=\mathrm{PM}\cos\dfrac{\pi}{14}=2\cos\dfrac{\pi}{14}$

よって，$\square=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{14}}$　…[答]

(2) △ADH に余弦定理を適用して

$$\mathrm{DH}^2=\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)^2+\left(2\cos\frac{\pi}{14}\right)^2-2\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cdot 2\cos\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{3\pi}{14}\overset{\text{Wolfram}}{=}\cdots=2$$

∴ $\mathrm{DH}=\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$　∴ $\square=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$　…[答]