第 449 回

「ガウス記号(1)」

参考　3 つのガウス記号の定義域を利用する。

① $[x]\leqq x<[x]+1$　② $x-1<[x]\leqq x$　③ $0\leqq x-[x]<1$，ただし，$x>0$

次の方程式の解を求めよ。

(1) $[x^2]+[x]-2x=0$　(2) $[x^2]+[x]=0$　(3) $x^2-[2x]=0$　(4) $x^2+2[x]-15=0$

(5) $x[x]+x-10[x]+14=0$

解答

(1) 参考の②より，$x^2-1<[x^2]\leqq x^2$，$x-1<[x]\leqq x$ であるから，辺々加えると，

$x^2+x-2<[x^2]+[x]\leqq x^2+x$

各辺に $-2x$ を加えると，$x^2-x-2<[x^2]+[x]-2x\leqq x^2-x$　$\therefore (x+1)(x-2)<0\leqq x(x-1)$

$-1<x<2$ かつ $x\leqq 0$，$1\leqq x$

$\therefore$ $-1<x\leqq 0$ または，$1\leqq x<2$ の範囲で解を求める。

(ア) $-1<x<0$ のとき，$0+(-1)-2x=0$ より，$x=-\dfrac{1}{2}$ （適）

(イ) $x=0$ のとき，左辺$=0+0-0=0=$右辺より，（適）

(ウ) $1\leqq x<\sqrt{2}$ のとき，$1+1-2x=0$ より，$x=1$ （適）

(エ) $\sqrt{2}\leqq x<\sqrt{3}$ のとき，$2+1-2x=0$ より，$x=\dfrac{3}{2}$ （適）

(オ) $\sqrt{3}\leqq x<2$ のとき，$3+1-2x=0$ より，$x=2$ （不適）

よって，求める解は，$x=-\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1,\ \dfrac{3}{2}$　答

(2) 参考の②より，$x^2-1<[x^2]\leqq x^2$，$x-1<[x]\leqq x$ であるから，辺々加えると，

$x^2+x-2<[x^2]+[x]\leqq x^2+x$　$(x+2)(x-1)<0\leqq x(x+1)$　$-2<x<1$ かつ $-1\leqq x\leqq 0$

$\therefore$ $-2<x\leqq -1$，$0\leqq x<1$ の範囲で解を求める。

(ア) $-2<x\leqq -\sqrt{3}$ のとき，左辺$=3+(-2)=1\fallingdotseq 0$ より，不適

(イ) $-\sqrt{3}<x\leqq -\sqrt{2}$ のとき，左辺$=2+(-2)=0$ より，適

(ウ) $-\sqrt{2}<x\leqq -1$ のとき，左辺$=1+(-2)=-1\fallingdotseq 0$ より，不適

(エ) $x=-1$ のとき，左辺$=1+(-1)=0$ より，適

(オ) $0\leqq x<1$ のとき，左辺$=0+0=0$ より，適

よって，求める解は，$-\sqrt{3}<x\leqq\sqrt{2}$，$x=-1$，$0\leqq x<1$　答

(3) 参考の②より，$2x-1<[2x]\leqq 2x$

各辺に -1 を掛けると，$-2x\leqq -[2x]<-(2x-1)$

各辺に x^2 を加えると，$x(x-2)\leqq x^2-[2x]<(x-1)^2$　$\therefore$ $x(x-2)\leqq 0<(x-1)^2$

$0\leqq x\leqq 2$ かつ，$x<1$，$1<x$

$\therefore$ $0\leqq x<1$，$1<x\leqq 2$ の範囲で解を求める。

(ア)　$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ のとき，$x^2 - 0 = 0$ より，$x = 0$ （適）

(イ)　$\dfrac{1}{2} \leqq x < 1$ のとき，$x^2 - 1 = 0$ より，$x = 1$ （不適）

(ウ)　$1 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき，$x^2 - 2 = 0$ より，$x = \sqrt{2}$ （適）

(エ)　$\dfrac{3}{2} < x < 2$ のとき，$x^2 - 3 = 0$ より，$x = \sqrt{3}$ （適）

(オ)　$x = 2$ のとき，左辺$= 4 - 4 = 0$ より，適

よって，求める解は，$x = 0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2$　答

(4)　参考の②より，$x - 1 < [x] \leqq x$ であるから，各辺に 2 を掛けてから，$x^2 - 15$ を加えると，

$x^2 + 2x - 17 < x^2 + 2[x] - 15 \leqq x^2 + 2x - 15$　$\therefore (x + 1 + 3\sqrt{2})(x + 1 - 3\sqrt{2}) < 0 \leqq (x + 5)(x - 3)$

$-1 - 3\sqrt{2} < x < -1 + 3\sqrt{2}$ かつ $x \leqq 5$，$3 \leqq x$

$\therefore (-6 <) -1 - 3\sqrt{2} < x \leqq -5$，$3 \leqq x < -1 + 3\sqrt{2}\ (< 4)$

(ア)　$-1 - 3\sqrt{2} < x < -5$ のとき，$x^2 + 2(-6) - 15 = 0$ より，$x = -3\sqrt{3}$ （適）

(イ)　$x = -5$ のとき，左辺$= 25 + 2(-5) - 15 = 0$ より，適

(イ)　$3 \leqq x < -1 + 3\sqrt{2}$ のとき，$x^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 0$ より，$x = 3$ （適）

よって，求める解は，$x = -3\sqrt{3},\ -5,\ 3$ 答

(5)　明らかに，$x = 0$ は不適なので，[1]　$x > 0$，[2]　$x < 0$ に場合分けをして考える。

[1]　$x > 0$ のとき，参考の②より，$x - 1 < [x] \leqq x$ であるから，

$x(x - 1) < x[x] \leqq x^2$，$-10x \leqq -10[x] < -10(x - 1)$

辺々加えると，$x^2 - 11x < x[x] - 10[x] < x^2 - 10x + 10$

各辺に $x + 14$ を加えると，$x^2 - 10x + 14 < x[x] + x - 10[x] + 14 < x^2 - 9x + 24$

$\therefore x^2 - 10x + 14 < 0 < x^2 - 9x + 24$

$1 < 5 - \sqrt{11} < x < 5 + \sqrt{11} < 9$ の範囲で解を求める。（$\because x^2 - 9x + 24 = \left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{17}{4} > 0$ ）

$x[x] + x - 10[x] + 14 = 0$ より，$x = \dfrac{10[x] - 14}{[x] + 1}$ であるから，

(ア)　$5 - \sqrt{11} < x < 2$ のとき，$x = \dfrac{10 \cdot 1 - 14}{1 + 1} = -2$ （不適）

(イ)　$2 \leqq x < 3$ のとき，$x = \dfrac{10 \cdot 2 - 14}{2 + 1} = 2$ （適）

(ウ)　$3 \leqq x < 4$ のとき，$x = \dfrac{10 \cdot 3 - 14}{3 + 1} = 4$ （不適）

(エ)　$4 \leqq x < 5$ のとき，$x = \dfrac{10 \cdot 4 - 14}{4 + 1} = \dfrac{26}{5}$ （不適）

(オ)　$5 \leqq x < 6$ のとき，$x = \dfrac{10 \cdot 5 - 14}{5 + 1} = 6$ （不適）

(カ)　$6 \leqq x < 7$ のとき，$x = \dfrac{10 \cdot 6 - 14}{6 + 1} = \dfrac{46}{7}$ （適）

(キ)　$7 \leqq x < 8$ のとき， $x = \dfrac{10\cdot 7-14}{7+1} = 7$ （適）

(ク)　$8 \leqq x < 5+\sqrt{11}$ のとき， $x = \dfrac{10\cdot 8-14}{8+1} = \dfrac{22}{3}$ （不適）

したがって， $x>0$ のときは， $x=2,\ \dfrac{46}{7},\ 7$

[2]　$x<0$ のとき，参考の②より， $x-1<[x] \leqq x$ であるから，

$x^2 \leqq x[x] < x(x-1)$， $-10x \leqq -10[x] < -10(x-1)$

辺々加えると， $x^2-10x \leqq x[x]-10[x] < x^2-11x+10$

各辺に $x+14$ を加えると， $x^2-9x+14 \leqq x[x]+x-10[x]+14 < x^2-10x+24$

$\therefore (x-2)(x-7) \leqq 0 < (x-4)(x-6)$

$2 \leqq x \leqq 7$ かつ $x<4$， $6<x$

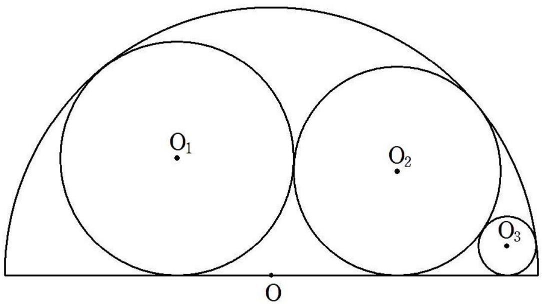
$\therefore 2 \leqq x < 4$， $6 < x \leqq 7$

$x<0$ であるから，この範囲に解はない。

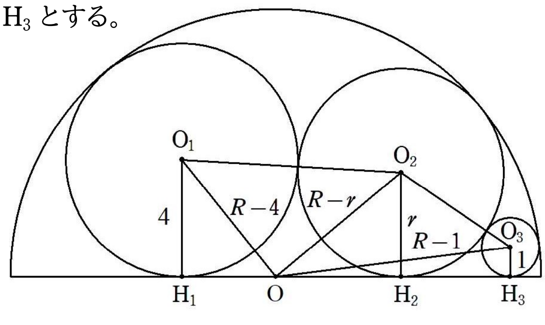
よって，以上により，求める解は， $x=2,\ \dfrac{46}{7},\ 7$　$\boxed{答}$

追加問題 1

半円 $O(R)$ の内部に 3 円 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ が図のように連結して内接している。
$r_1=4$， $r_3=1$ のとき， $R,\ r_2$ の値をそれぞれ求めよ。



$\boxed{解答}$　O_1，O_2，O_3 から直径に下した垂線の足をそれぞれ H_1，H_2，H_3 とする。



$H_1O+OH_3=H_1H_2+H_2H_3$ より，

$\sqrt{(R-4)^2-4^2}+\sqrt{(R-1)^2-1^2} = 2\sqrt{4\cdot r}+2\sqrt{r\cdot 1}$

整理すると， $\sqrt{R^2-8R}+\sqrt{R^2-2R} = 6\sqrt{r}$　…①

$OH_2+H_2H_3=OH_3$ より，

$\sqrt{(R-r)^2-r^2}+2\sqrt{r\cdot 1} = \sqrt{(R-1)^2-1^2}$

整理すると， $\sqrt{R^2-2Rr}+2\sqrt{r} = \sqrt{R^2-2R}$　…②

①+②×3 より， $\sqrt{R^2-8R}+3\sqrt{R^2-2Rr} = 2\sqrt{R^2-2R}$

両辺を $\sqrt{R}$ で割ると， $3\sqrt{R-2r} = 2\sqrt{R-2}-\sqrt{R-8}$

両辺を 2 乗すると， $9(R-2r)=5R-16-4\sqrt{(R-2)(R-8)}$

$\therefore r = \dfrac{2R+8+2\sqrt{(R-2)(R-8)}}{9}$　…③

①の両辺を 2 乗すると， $2R^2-10R+2R\sqrt{(R-2)(R-8)} = 4\cdot 9r$

これに③を代入すると， $2R^2-10R+2R\sqrt{(R-2)(R-8)} = 4\{2R+8+2\sqrt{(R-2)(R-8)}\}$

整理すると， $R^2-9R-16=(4-R)\sqrt{(R-2)(R-8)}$

両辺を２乗して左辺に移項すると，$(R^2-9R-16)^2-(4-R)^2(R-2)(R-8)=0$

整理すると，$-9R(7R-64)=0$

$R>0$ より，$R=\dfrac{64}{7}$

これを③に代入して，$r=\dfrac{1}{9}\left\{2\cdot\dfrac{64}{7}+8+2\sqrt{\left(\dfrac{64}{7}-2\right)\left(\dfrac{64}{7}-8\right)}\right\}=\dfrac{32}{9}$

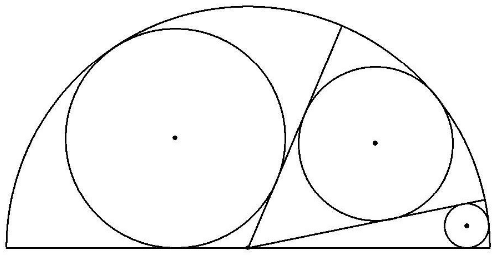
よって，$R=\dfrac{64}{7}$，$r=\dfrac{32}{9}$ 答

補足　同様に計算すると，$17-12\sqrt{2}<\dfrac{r_1}{r_3}<17+12\sqrt{2}$ のとき，

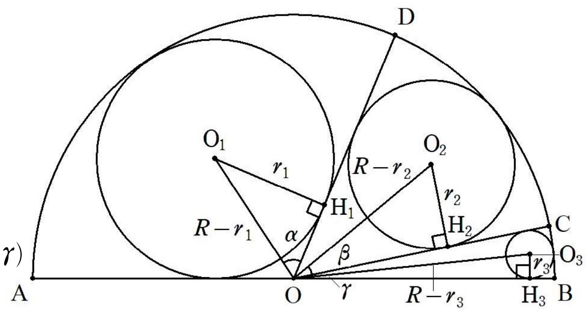
$R=\dfrac{16r_1r_3}{6\sqrt{r_1r_3}-r_1-r_3}$，$r_2=\dfrac{8r_1r_3}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3})^2}$

追加問題 2

図のように半円を３つの扇形に分割し，それらに半径10，７，２の円を内接させる。このとき，半円の半径を求めよ。



解答　半円をO(R)，３個の円を$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とし，図のように記号を付ける。



$\angle O_1OH_1=\alpha$，$\angle O_2OH_2=\beta$，$\angle O_3OH_3=\gamma$ とおくと，

$\sin\alpha=\dfrac{r_1}{R-r_1}$，$\sin\beta=\dfrac{r_2}{R-r_2}$，$\sin\gamma=\dfrac{r_3}{R-r_3}$　…①

である。

ここで，$\alpha+\beta+\gamma=90°$ であるから，$\cos(\alpha+\beta)=\cos(90°-\gamma)$

変形すると，$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sin\gamma$

移項して両辺を２乗すると，$(\cos\alpha\cos\beta)^2=(\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma)^2$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ 等であるから，$(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)=(\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma)^2$

展開して整理すると，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma-1=0$

これに①の３式を代入すると，$\left(\dfrac{r_1}{R-r_1}\right)^2+\left(\dfrac{r_2}{R-r_2}\right)^2+\left(\dfrac{r_3}{R-r_3}\right)^2+2\cdot\dfrac{r_1}{R-r_1}\cdot\dfrac{r_2}{R-r_2}\cdot\dfrac{r_3}{R-r_3}-1=0$

両辺に $(R-r_1)^2(R-r_2)^2(R-r_3)^2$ を掛けると，$r_1{}^2(R-r_2)^2(R-r_3)^2+r_2{}^2(R-r_1)^2(R-r_3)^2+r_3{}^2(R-r_1)^2(R-r_2)^2$

$+2r_1r_2r_3(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)-(R-r_1)^2(R-r_2)^2(R-r_3)^2=0$

展開して R について整理すると，

$-R^2\{R^4-2(r_1+r_2+r_3)R^3+4(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)R^2-10r_1r_2r_3R+2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-r_1{}^2r_2{}^2-r_2{}^2r_3{}^2-r_3{}^2r_1{}^2\}$

$=0$

$R\neq0$ より，

$R^4-2(r_1+r_2+r_3)R^3+4(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)R^2-10r_1r_2r_3R+2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)-r_1{}^2r_2{}^2-r_2{}^2r_3{}^2-r_3{}^2r_1{}^2=0$ …②

これに，$r_1=10$，$r_2=7$，$r_3=2$ を代入すると，

$R^4-38R^3+416R^2-1400R-176=0 \quad (R-22)(R^3-16R^2+64R+8)=0$

ここで，$R>10$ より，$R^3-16R^2+64R+8=R(R-8)^2+8>0$ であるから，

$R=22$

よって，半円の半径は 22　答

補足1　②は R について 4 次方程式であるから，r_1，r_2，r_3 を適当に与えると，解 R を求めるのは容易ではない。

しかし，②は r_3 については高々 2 次方程式であるから，R，r_1，r_2 を与えると r_3 は次のように求められる。

[1]　$r_2=r_1$ のとき，$r_3=\dfrac{R^2-2Rr_1-{r_1}^2}{R-2r_1}$

[2]　$r_2 \fallingdotseq r_1$ のとき，$r_3=\dfrac{-R^3+2(r_1+r_2)R^2-5r_1r_2R+r_1r_2(r_1+r_2)+(R-r_1)(R-r_2)\sqrt{(R-2r_1)(R-2r_2)}}{(r_1-r_2)^2}$

補足2　有理数となる例

$(R,\ r_1,\ r_2,\ r_3)=\left(12,\ 5,\ \dfrac{38}{9},\ 2\right)$，$\left(18,\ 7,\ \dfrac{137}{18},\ 1\right)$，$\left(18,\ 8,\ 5,\ \dfrac{32}{9}\right)$，$(22,\ 10,\ 7,\ 2)$，

$\left(24,\ \cdot 8,\ \dfrac{264}{25},\ 3\right)$，$\left(24,\ 11,\ 8,\ \dfrac{8}{9}\right)$，$\left(24,\ 11,\ 3,\ \dfrac{11}{16}\right)$ など

（2024/12/8　ジョーカー）