問題

⑴ $(x^2-1)+(x-1)-2x<[x^2]+[x]-2x\leq x^2+x-2x$なので、

$(x^2-1)+(x-1)-2x<0\Rightarrow(x-2)(x+1)<0\Rightarrow-1<x<2$

$x^2+x-2x\geq0\Rightarrow x(x-1)\geq0\Rightarrow x\leq0,x\geq1$

です。また、

$$[x^2]+[x]-2x=0\Rightarrow x=\frac{[x^2]+[x]}{2}\Rightarrow x\text{は}\frac{1}{2}\text{の倍数}$$

なので、$x=-\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2}$が解の候補になりますが、これらはすべて$[x^2]+[x]-2x=0$を満たすので、

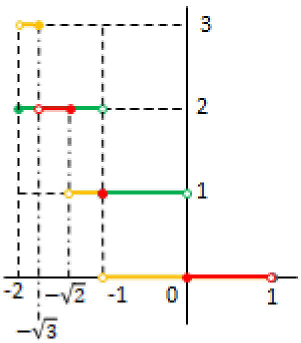
求める解は$x=-\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2}$です。

⑵ $(x^2-1)+(x-1)<[x^2]+[x]\leq x^2+x$なので、

$(x^2-1)+(x-1)<0\Rightarrow(x-1)(x+2)<0\Rightarrow-2<x<1$

$x^2+x\geq0\Rightarrow x(x+1)\geq0\Rightarrow x\leq-1,x\geq0$

です。



この範囲内で、$[x^2]+[x]=0$となるようなxを求めればよいのですが、$y=[x^2]$と$y=-[x]$を図示して、オーバーラップしている範囲を求めるのが直感的でわかり易いです。

$y=[x^2]$はオレンジ色で、$y=-[x]$は緑色で、重なっている箇所は赤色で表しました。

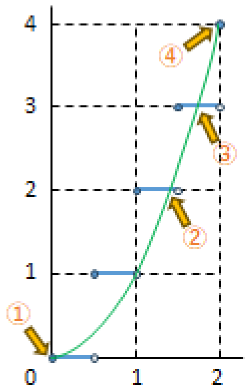
見ての通り、求める解は、$-\sqrt{3}<x\leq-\sqrt{2}$、$x=-1$、$0\leq x<1$です。

(3) $x^2-2x \leq x^2-[2x] < x^2-(2x-1)$なので、

$x^2-2x \leq 0 \Rightarrow x(x-2) \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

$x^2-(2x-1) > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$

です。



前問と同様に、この範囲内で、$y=x^2$と$y=[2x]$を図示して、交点を求めると、次のようになります。

交点①④のx座標は0,2です。

交点②のx座標は$x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$です。

交点③のx座標は$x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}$です。

以上より、求める解は、$x=0,\sqrt{2},\sqrt{3},2$です。

(4) $x^2+2(x-1)-15 < x^2+2[x]-15 \leq x^2+2x-15$なので、

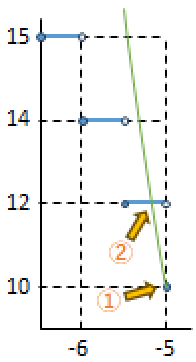
$x^2+2(x-1)-15 < 0 \Rightarrow x^2+2x-17 < 0 \Rightarrow -1-3\sqrt{2} < x < -1+3\sqrt{2}$

$x^2+2x-15 > 0 \Rightarrow (x-3)(x+5) \geq 0 \Rightarrow x \leq -5, x \geq 3$

です。

前問と同様に、この範囲内で、$y=x^2-15$と$y=-[2x]$を図示して、交点を求めます。

$-1-3\sqrt{2} < x \leq -5$のとき

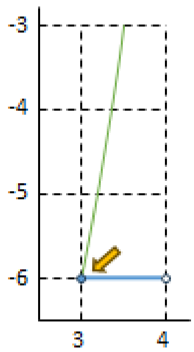


交点①のx座標は-5です。

交点②のx座標は$x^2-15=12$

$\Rightarrow x=-3\sqrt{3}$です。

$3 \leq x \leq -1+3\sqrt{2}$のとき



交点のx座標は3です。

以上より、求める解は、$x=-3\sqrt{3},-5,3$です。

(5) 次のように、与式を2つの積に分解します。

$x[x]+x-10[x]+14=0 \Rightarrow (x-10)([x]+1)=-24$

すると、

右辺 $\neq 0 \Rightarrow x-10 \neq 0, [x]+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 10$、$x<-1, x \geq 0$

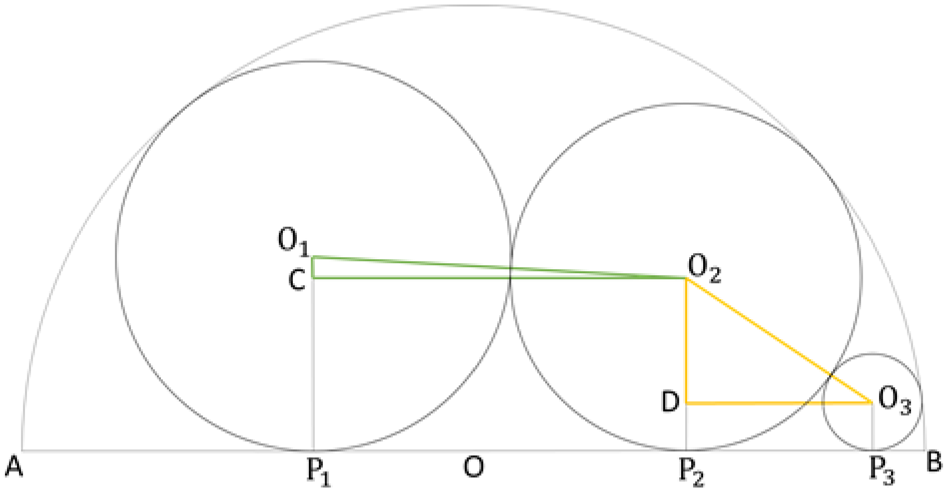
です。

また、$[x]+1$は整数なので、$x-10$も整数です。したがって、xは整数です。

そして、右辺が負なので、$[x]+1$と$x-10$は異符号です。しかし、$x>10$または$x<-1$なら、左辺 >0なので不適です。

以上の条件を合わせると、xは0〜9の整数であることがわかります。この中で、$x-10$と$x+1$が24の約数になっているのは、xが2,7の場合です。よって、求める解は$x=2,7$です。

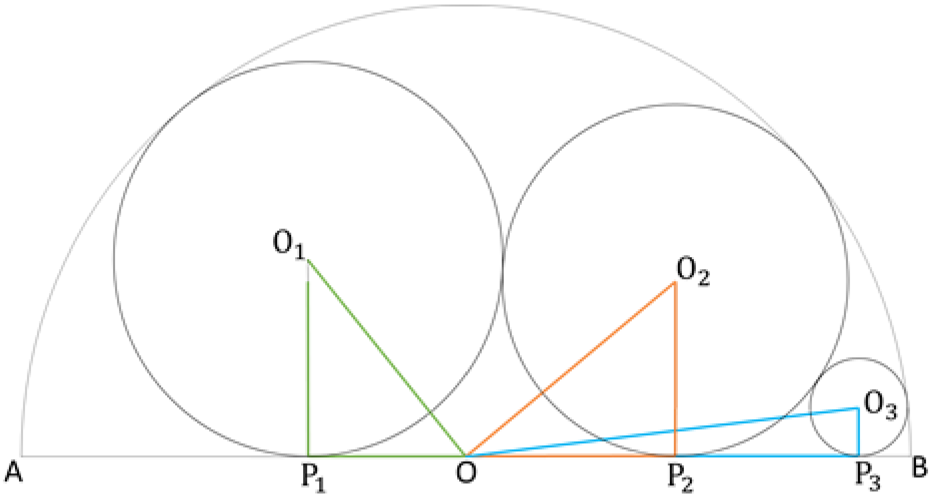
追加問題1
下図のように、O_1、O_2、O_3からABに垂直に下した点を、P_1、P_2、P_3とし、O_2からO_1P_1に垂直に下した点をC、O_3からO_2P_2に垂直に下した点をDとし、$OP_1 = d_1$、$OP_2 = d_2$、$OP_3 = d_3$とします。



すると、⊿CO_1O_2、⊿DO_2O_3ができるので、それぞれ三平方の定理を適用すると、

$$CO_1{}^2 + CO_2{}^2 = O_1O_2{}^2 \Rightarrow (r_1 - r_2)^2 + (d_1 + d_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \cdots ①$$
$$DO_2{}^2 + DO_3{}^2 = O_2O_3{}^2 \Rightarrow (r_2 - r_3)^2 + (d_3 - d_2)^2 = (r_2 + r_3)^2 \cdots ②$$

です。



また、⊿OO_1P_1、⊿OO_2P_2、⊿OO_3P_3にも、それぞれ三平方の定理を適用すると、

$$OP_1{}^2 + O_1P_1{}^2 = OO_1{}^2 \Rightarrow r_1{}^2 + d_1{}^2 = (R - r_1)^2 \cdots ③$$
$$OP_2{}^2 + O_2P_2{}^2 = OO_2{}^2 \Rightarrow r_2{}^2 + d_2{}^2 = (R - r_2)^2 \cdots ④$$
$$OP_3{}^2 + O_3P_3{}^2 = OO_3{}^2 \Rightarrow r_3{}^2 + d_3{}^2 = (R - r_3)^2 \cdots ⑤$$

です。ここで、与えられた条件は、

$$r_1 = 4 \cdots ⑥$$
$$r_3 = 1 \cdots ⑦$$

です。①～⑦を解くと、

$$(\mathrm{R},\mathrm{r}_2,\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\mathrm{d}_3)=(0,0,0,0,0),$$
$$\left(-\frac{64}{17},32,\pm\frac{80\sqrt{2}}{17},\pm\frac{192\sqrt{2}}{17},\pm\frac{56\sqrt{2}}{17}\right),\left(\frac{64}{7},\frac{32}{9},\pm\frac{16\sqrt{2}}{7},\pm\frac{64\sqrt{2}}{21},\pm\frac{40\sqrt{2}}{7}\right)$$

ですが、$\mathrm{R},\mathrm{r}_2,\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\mathrm{d}_3$は正数なので、

$$(\mathrm{R},\mathrm{r}_2,\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\mathrm{d}_3)=\left(\frac{64}{7},\frac{32}{9},\frac{16\sqrt{2}}{7},\frac{64\sqrt{2}}{21},\frac{40\sqrt{2}}{7}\right)$$

が有効な解となります。よって、$\mathrm{R}=\frac{64}{7}$、$\mathrm{r}_2=\frac{32}{9}$です。