問題

(1) $(x^2-1)+(x-1)-2x<[x^2]+[x]-2x\leq x^2+x-2x$なので、

$(x^2-1)+(x-1)-2x<0\Rightarrow(x-2)(x+1)<0\Rightarrow-1<x<2$

$x^2+x-2x\geq0\Rightarrow x(x-1)\geq0\Rightarrow x\leq0,x\geq1$

です。また、

$$[x^2]+[x]-2x=0\Rightarrow x=\frac{[x^2]+[x]}{2}\Rightarrow x\text{ は}\frac{1}{2}\text{の倍数}$$

なので、$x=-\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2}$が解の候補になりますが、これらはすべて$[x^2]+[x]-2x=0$を満たすので、

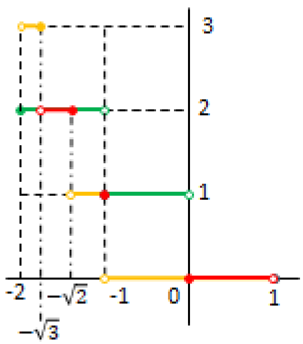
求める解は$x=-\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2}$です。

(2) $(x^2-1)+(x-1)<[x^2]+[x]\leq x^2+x$なので、

$(x^2-1)+(x-1)<0\Rightarrow(x-1)(x+2)<0\Rightarrow-2<x<1$

$x^2+x\geq0\Rightarrow x(x+1)\geq0\Rightarrow x\leq-1,x\geq0$

です。



この範囲内で、$[x^2]+[x]=0$となるようなxを求めればよいのですが、$y=[x^2]$と$y=-[x]$を図示して、オーバーラップしている範囲を求めるのが直感的でわかり易いです。

$y=[x^2]$はオレンジ色で、$y=-[x]$は緑色で、重なっている箇所は赤色で表しました。

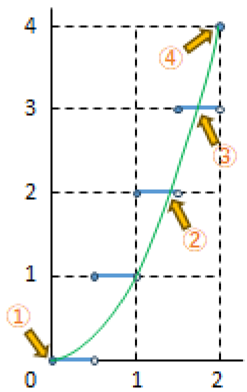
見ての通り、求める解は、$-\sqrt{3}<x\leq-\sqrt{2}$、$x=-1$、$0\leq x<1$です。

(3) $x^2 - 2x \leq x^2 - [2x] < x^2 - (2x - 1)$なので、

$x^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow x(x - 2) \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

$x^2 - (2x - 1) > 0 \Rightarrow (x - 1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$

です。



前問と同様に、この範囲内で、$y = x^2$と$y = [2x]$を図示して、交点を求めると、次のようになります。

交点①④のx座標は0,2です。

交点②のx座標は$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$です。

交点③のx座標は$x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$です。

以上より、求める解は、$x = 0, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$です。

(4) $x^2 + 2(x - 1) - 15 < x^2 + 2[x] - 15 \leq x^2 + 2x - 15$なので、

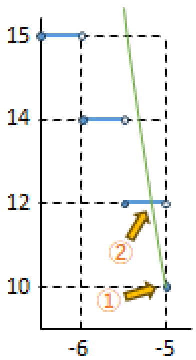
$x^2 + 2(x - 1) - 15 < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 17 < 0 \Rightarrow -1 - 3\sqrt{2} < x < -1 + 3\sqrt{2}$

$x^2 + 2x - 15 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 5) \geq 0 \Rightarrow x \leq -5, x \geq 3$

です。

前問と同様に、この範囲内で、$y = x^2 - 15$と$y = -[2x]$を図示して、交点を求めます。

$-1 - 3\sqrt{2} < x \leq -5$のとき

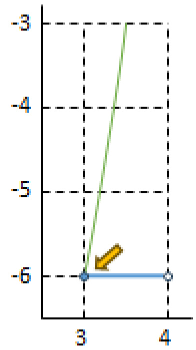


交点①のx座標は-5です。

交点②のx座標は$x^2 - 15 = 12$

$\Rightarrow x = -3\sqrt{3}$です。

$3 \leq x \leq -1 + 3\sqrt{2}$のとき



交点のx座標は3です。

以上より、求める解は、$x = -3\sqrt{3}, -5, 3$です。

(5) 次のように、与式を2つの積に分解します。2024/12/27 修正

$$x[x]+x-10[x]+14=0 \Rightarrow (x-10)([x]+1)=-24$$

すると、

$$\text{右辺} \neq 0 \Rightarrow x-10 \neq 0, [x]+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 10、x<-1, x \geq 0$$

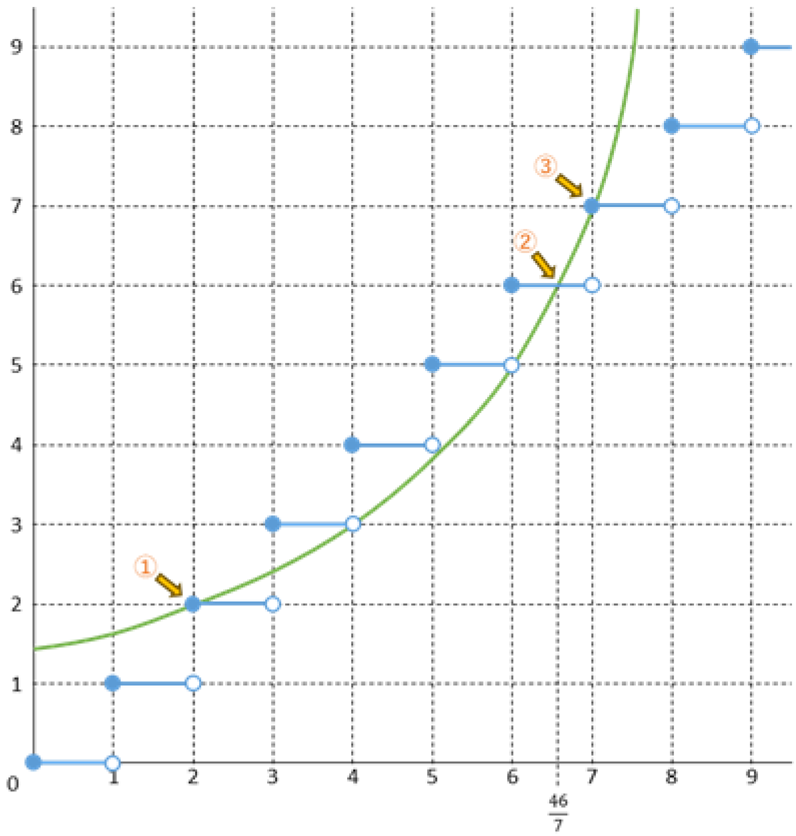
です。

また、右辺が負なので、$[x]+1$と$x-10$は異符号です。しかし、$x>10$または$x<-1$なら、左辺 >0なので不適です。以上の条件を合わせると、xの取り得る範囲は$0 \leq x \leq 9$であることがわかります。

与式は、

$$x[x]+x-10[x]+14=0 \Rightarrow [x]=-\frac{24}{x-10}-1$$

と変形できるので、前問と同様に、この範囲内で、$y=[x]$と$y=-\frac{24}{x-10}-1$を図示して、交点を求めます。



交点①③のx座標は2,7です。

交点②のx座標は

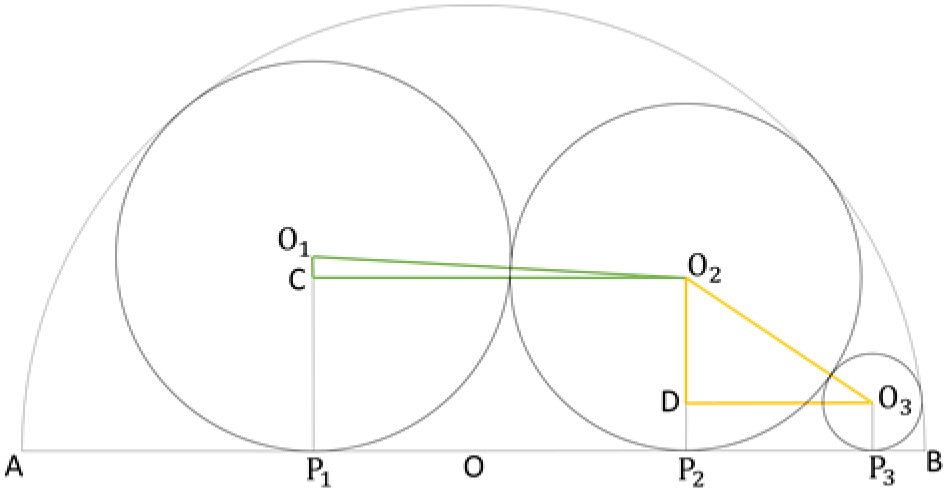
$$-\frac{24}{x-10}-1=6 \Rightarrow x=\frac{46}{7}$$

です。

以上より、求める解は、$x=2, \frac{46}{7}, 7$です。

追加問題1

下図のように、O_1、O_2、O_3からABに垂直に下した点を、P_1、P_2、P_3とし、O_2からO_1P_1に垂直に下した点をC、O_3からO_2P_2に垂直に下した点をDとし、$OP_1 = d_1$、$OP_2 = d_2$、$OP_3 = d_3$とします。

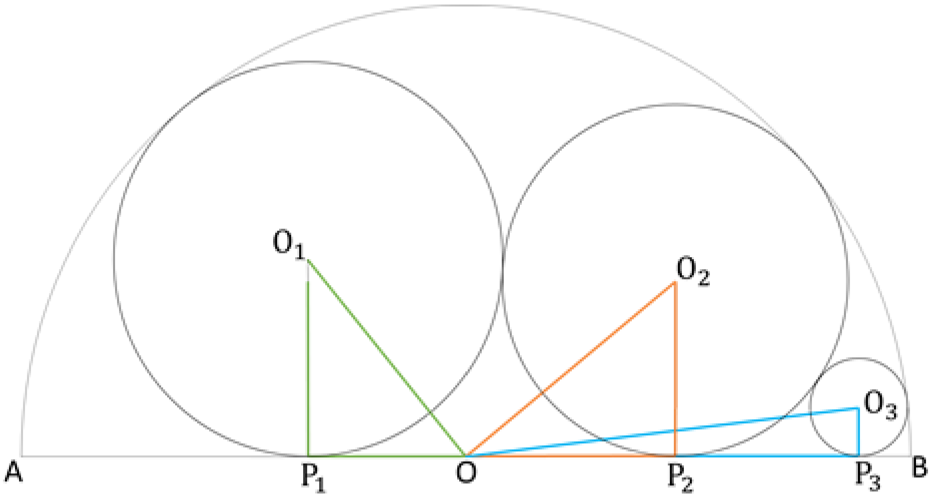


すると、⊿CO_1O_2、⊿DO_2O_3ができるので、それぞれ三平方の定理を適用すると、

$$CO_1{}^2 + CO_2{}^2 = O_1O_2{}^2 \Rightarrow (r_1 - r_2)^2 + (d_1 + d_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \cdots ①$$

$$DO_2{}^2 + DO_3{}^2 = O_2O_3{}^2 \Rightarrow (r_2 - r_3)^2 + (d_3 - d_2)^2 = (r_2 + r_3)^2 \cdots ②$$

です。



また、⊿OO_1P_1、⊿OO_2P_2、⊿OO_3P_3にも、それぞれ三平方の定理を適用すると、

$$OP_1{}^2 + O_1P_1{}^2 = OO_1{}^2 \Rightarrow r_1{}^2 + d_1{}^2 = (R - r_1)^2 \cdots ③$$

$$OP_2{}^2 + O_2P_2{}^2 = OO_2{}^2 \Rightarrow r_2{}^2 + d_2{}^2 = (R - r_2)^2 \cdots ④$$

$$OP_3{}^2 + O_3P_3{}^2 = OO_3{}^2 \Rightarrow r_3{}^2 + d_3{}^2 = (R - r_3)^2 \cdots ⑤$$

です。ここで、与えられた条件は、

$$r_1 = 4 \cdots ⑥$$

$$r_3 = 1 \cdots ⑦$$

です。①～⑦を解くと、

$$(\mathrm{R}, \mathrm{r}_2, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3) = (0,0,0,0,0),$$
$$\left(-\frac{64}{17}, 32, \pm\frac{80\sqrt{2}}{17}, \pm\frac{192\sqrt{2}}{17}, \pm\frac{56\sqrt{2}}{17}\right), \left(\frac{64}{7}, \frac{32}{9}, \pm\frac{16\sqrt{2}}{7}, \pm\frac{64\sqrt{2}}{21}, \pm\frac{40\sqrt{2}}{7}\right)$$

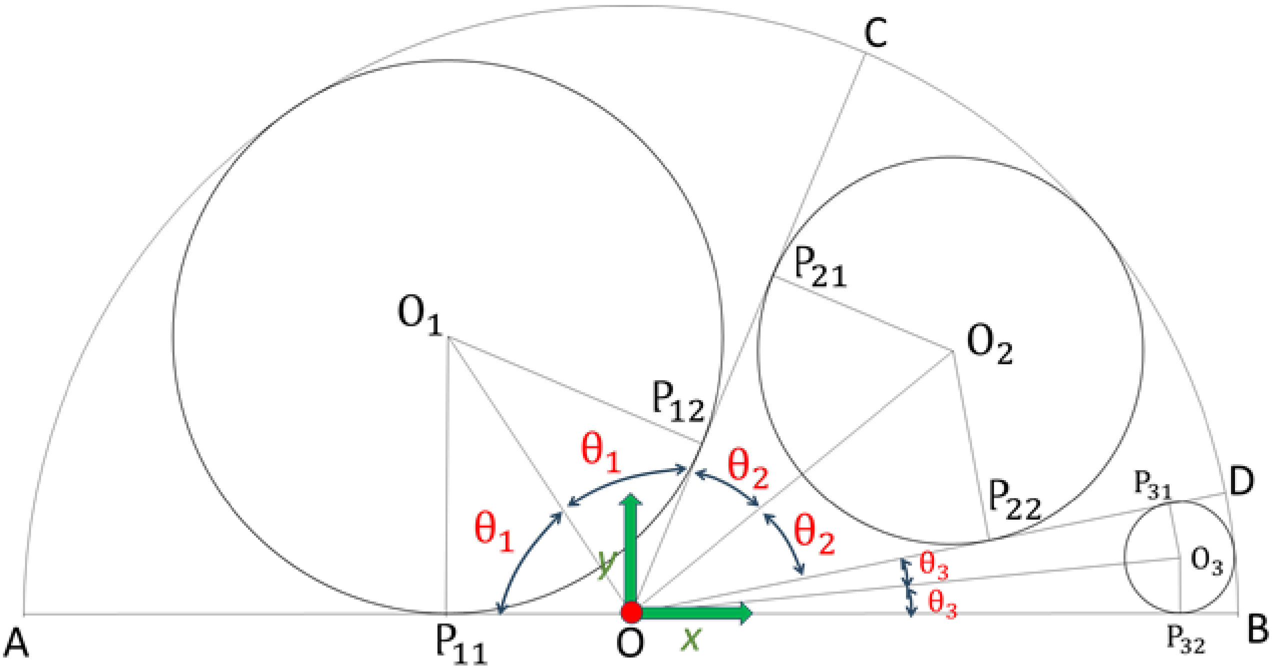
ですが、$\mathrm{R}, \mathrm{r}_2, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3$は正数なので、

$$(\mathrm{R}, \mathrm{r}_2, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3) = \left(\frac{64}{7}, \frac{32}{9}, \frac{16\sqrt{2}}{7}, \frac{64\sqrt{2}}{21}, \frac{40\sqrt{2}}{7}\right)$$

が有効な解となります。よって、$\mathrm{R} = \frac{64}{7}$、$\mathrm{r}_2 = \frac{32}{9}$です。

追加問題2 2024/12/31 追記

下図のように、半円の中心Oと扇の頂点A, B, C, D、各内接円の中心O_1, O_2, O_3とします。そして、O_1, O_2, O_3から扇の辺に垂直に下した点を$P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}$とします。



すると、図形の対称性から、

$\angle O_1OP_{11} = \angle O_1OP_{12} = \theta_1$

$\angle O_2OP_{21} = \angle O_2OP_{22} = \theta_2$

$\angle O_3OP_{31} = \angle O_3OP_{32} = \theta_3$

ですから、

$$2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_1) = \pi \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

です。また、

$$\sin\theta_1 = \frac{10}{R-10} \qquad \sin\theta_2 = \frac{7}{R-7} \qquad \sin\theta_3 = \frac{2}{R-2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{R^2-20R}}{R-10} \qquad \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{R^2-14R}}{R-7} \qquad \cos\theta_3 = \frac{\sqrt{R^2-4R}}{R-2}$$

です。

後は、半円の中心Oに座標系（緑色の矢印）を導入して、代数学的に解きます。方程式の立て方はいろいろ考えられますが、力任せにやることは避け、扱い易い形になるように工夫します。やってみた限りでは、次の関係が最もシンプルだと思います。

x 軸方向の単位ベクトルを O の回りに$\theta_1 + \theta_2$回転させたときの x 軸成分 =

y 軸方向の単位ベクトルを O の回りに$-\theta_3$回転させたときの x 軸成分

すると、

$$\text{左辺} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{R^2-20R}}{R-10} & -\dfrac{10}{R-10} \\ \dfrac{10}{R-10} & \dfrac{\sqrt{R^2-20R}}{R-10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{R^2-14R}}{R-7} & -\dfrac{7}{R-7} \\ \dfrac{7}{R-7} & \dfrac{\sqrt{R^2-14R}}{R-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{R^2-20R}\sqrt{R^2-14R}}{(R-10)(R-7)} - \dfrac{70}{(R-10)(R-7)}} \\ \dfrac{10\sqrt{R^2-14R}}{(R-10)(R-7)} + \dfrac{7\sqrt{R^2-20R}}{(R-10)(R-7)} \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta_3) & -\sin(-\theta_3) \\ \sin(-\theta_3) & \cos(-\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{R^2-4R}}{R-2} & \dfrac{2}{R-2} \\ -\dfrac{2}{R-2} & \dfrac{\sqrt{R^2-4R}}{R-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\dfrac{2}{R-2}} \\ \dfrac{\sqrt{R^2-4R}}{R-2} \end{bmatrix}$$

となり、

$$\frac{\sqrt{R^2-20R}\sqrt{R^2-14R}}{(R-10)(R-7)} - \frac{70}{(R-10)(R-7)} = \frac{2}{R-2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2-20R}\sqrt{R^2-14R} = \left\{\frac{2}{R-2} + \frac{70}{(R-10)(R-7)}\right\}(R-10)(R-7) = \frac{2R(R+18)}{R-2}$$

両辺を二乗して、平方根を飛ばすと、

$$(R^2-20R)(R^2-14R) = \left\{\frac{2R(R+18)}{R-2}\right\}^2$$

$$\Rightarrow \frac{(R-22)R^2(R^3-16R^2+64R+8)}{(R-2)^2} = 0 \Rightarrow R = 22$$

となります。なお、補足に記載した通り、$R \geq 0$のとき$R^3 - 16R^2 + 64R + 8 = 0$ の解は存在しません。

以上より、求める半径は22となります。

補足 $\mathbf{R^3 - 16R^2 + 64R + 8}$、$\mathbf{R \geq 0}$のときの解について

$$f(R) = R^3 - 16R^2 + 64R + 8$$

とすると、

$$f(R)' = 3R^2 - 32R + 64$$

なので、

$$f(R)' = 0 \Rightarrow R = \frac{8}{3}, 8$$

です。

増減表を作ると、以下のようになります。

R	0	…	$\frac{8}{3}$	…	8	…
$f(R)'$		+	0	−	0	+
$f(R)$	8	↗	$\frac{2264}{27}$	↘	8	↗

よって、$R \geq 0$のとき解は存在しません。