449 よふかしのつらいおじさん

問題

(1)

$[x^2]+[x]=2x$ として考えます。

つまり、2 倍して整数になるので、x は整数か小数部分が 0.5 の数です。

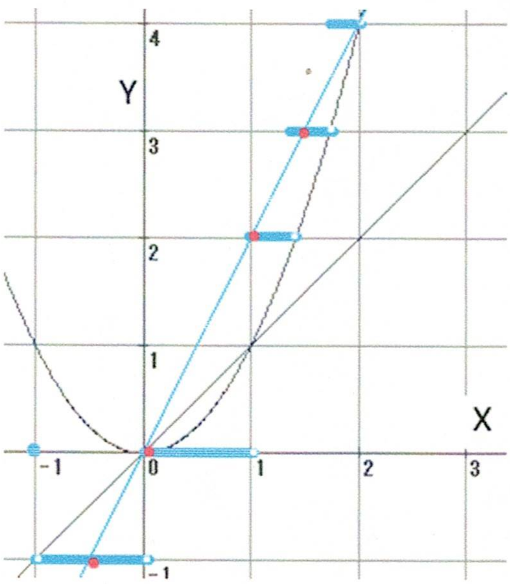
定義式のどれを使っても同じようになりますが、②でやってみると、

$\begin{cases} x^2-1<[x^2]\leq x^2 \\ x-1<[x]\leq x \end{cases}$ 辺々足して $x^2+x-2<[x^2]+[x]\leq x^2+x$

$\rightarrow\ x^2+x-2<2x\leq x^2+x \ \rightarrow \begin{cases} x^2-x-2<0 \\ x^2-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ x\leq 0,\ 1\leq x \end{cases}$

$\rightarrow\ -1<x\leq 0,\ 1\leq x<2$

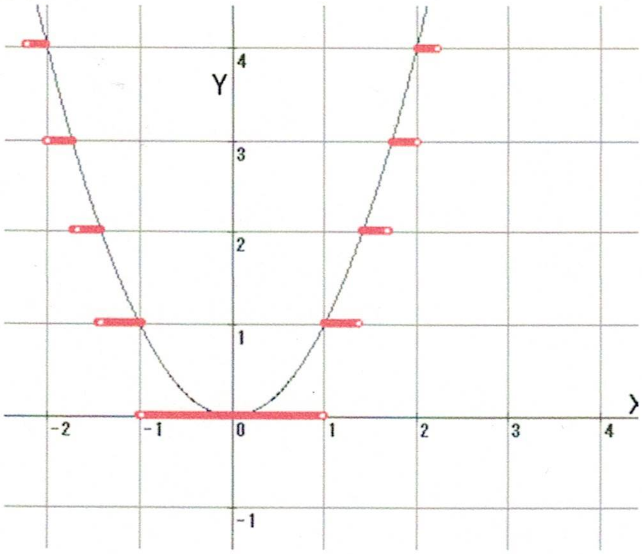
よって、$x=-\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ \frac{3}{2}$

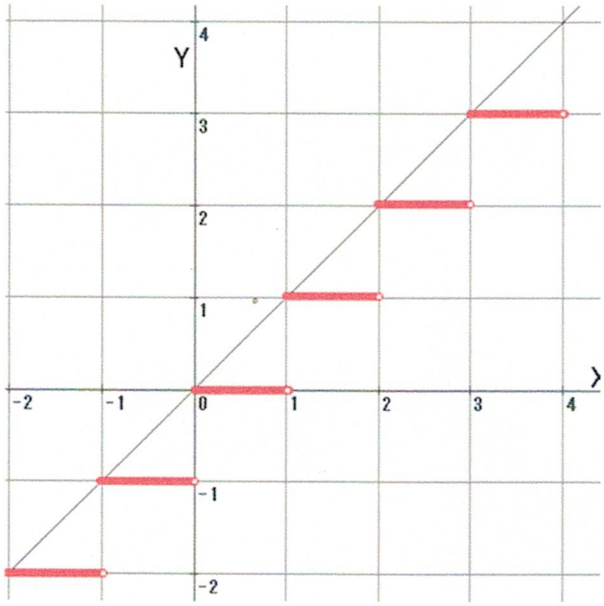


(2)

$[x^2]+[x]=0$

$y=[x^2]$ と $y=[x]$ のグラフをよく見て解は、$-\sqrt{3}<x\leq-\sqrt{2},\ x=-1,\ 0\leq x<1$





上の問題と同様に考えると、

$[x^2]+[x]=0$

$\begin{cases} x^2-1<[x^2]\leq x^2 \\ x-1<[x]\leq x \end{cases}$ 辺々足して $x^2+x-2<[x^2]+[x]\leq x^2+x$

$\rightarrow\ x^2+x-2<0\leq x^2+x\ \rightarrow \begin{cases} x^2+x-2<0 \\ x^2+x\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2<x<1 \\ x\leq -1,\ 0\leq x \end{cases}$

$\rightarrow\ -2<x\leq -1,\ 0\leq x<1$

この範囲で、和が 0 になるのは、

x	-2	…	$-\sqrt{3}$	…	$-\sqrt{2}$	…	-1	…	0	…	1
$[x^2]$	4	3	3	2	2	1	1	0	0	0	1
$[x]$	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	0	0	1
$[x^2]+[x]$	2	1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	2

$-\sqrt{3}<x\leq -\sqrt{2},\ x=-1,\ 0\leq x<1$

(3)

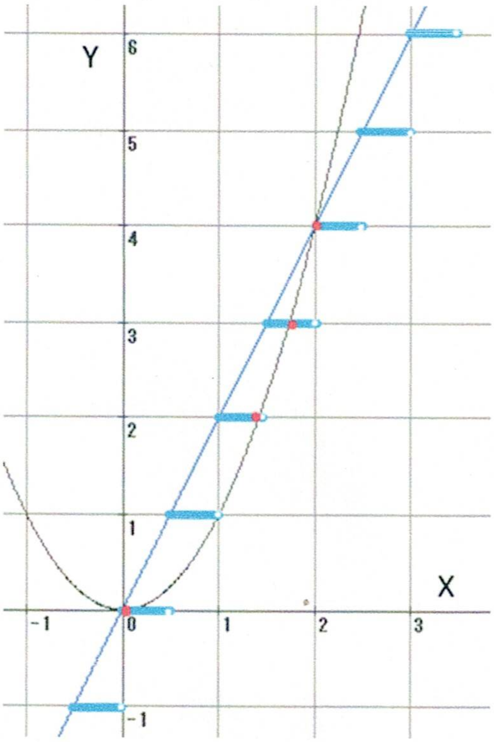
$x^2 = [2x]$ として考えます。(つまり、x^2 は整数です)

今度は、定義式①でやってみます。

$$[2x] \leq 2x < [2x] + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 \leq 2x < x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

よって、1 以外で 0 から 2 までの範囲で 2 乗が整数になる数は、$0, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ です。

$y = x^2$ と $y = [2x]$ との交点が解です。



(4)

定義式②より、

$$x^2 + 2[x] - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad [x] = \frac{-x^2 + 15}{2} \quad \rightarrow \quad x - 1 < [x] \leq x \quad \rightarrow \quad x - 1 < \frac{-x^2 + 15}{2} \leq x$$

$$\rightarrow \quad 2x - 2 < -x^2 + 15 \leq 2x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 17 < 0 \\ x^2 + 2x - 15 \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -1 - 3\sqrt{2} < x < -1 + 3\sqrt{2} \\ x \leq -5, \quad 3 \leq x \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad -1 - 3\sqrt{2} < x \leq -5, \ 3 \leq x < -1 + 3\sqrt{2}$$

この範囲で、x^2 が整数になる x は、$x = -5, \ -3\sqrt{3}, \ -\sqrt{26}, \ \sqrt{10}, \ 3$ です。

$$x = -5 \quad \rightarrow \quad 25 + 2 \times (-5) - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -5$$

$$\begin{cases} x = -3\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{26} \\ x = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27 + 2 \times (-6) - 15 = 0 \\ 26 + 2 \times (-6) - 15 = -1 \\ 10 + 2 \times 3 - 15 = 1 \end{cases} \rightarrow \quad x = -3\sqrt{3}$$

$$x = 3 \quad \rightarrow \quad 9 + 2 \times 3 - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

(5)

もし $x = 10$ とすると左辺は、$x[x] + x - 10[x] + 14 = 10 \times 10 + 10 - 10 \times 10 + 14 = 24$

となるので、$x \neq 10$ です。

よって、

$$x[x] + x - 10[x] + 14 = 0 \quad \rightarrow \quad [x] = -\frac{x + 14}{x - 10}$$

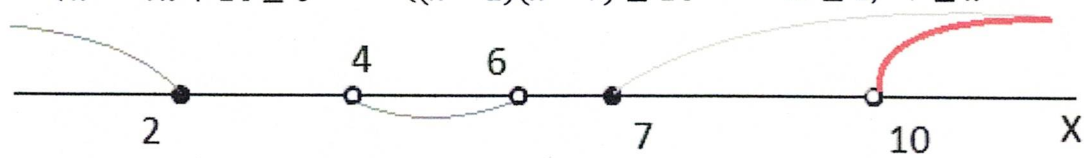
定義式②より、

$x-1<[x]\leq x \quad \rightarrow \quad x-1<-\dfrac{x+14}{x-10}\leq x$

・$x>10$ のとき、

$x-1<-\dfrac{x+14}{x-10}\leq x \quad \rightarrow \quad (x-1)(x-10)<-(x+14)\leq x(x-10)$

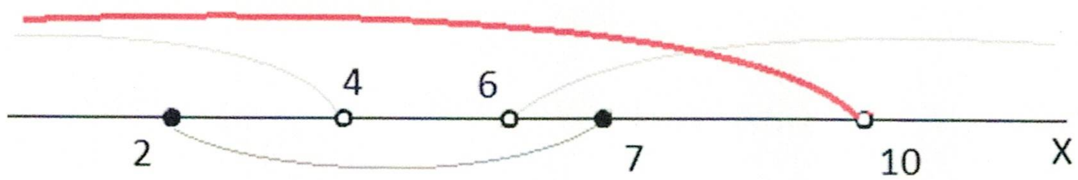
$\rightarrow \begin{cases} x^2-10x+24<0 \\ x^2-9x+14\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-4)(x-6)<0 \\ (x-2)(x-7)\geq 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4<x<6 \\ x\leq 2,\ \ 7\leq x \end{cases} \rightarrow$ 解なし



・$x<10$ のとき、

$x-1<-\dfrac{x+14}{x-10}\leq x \quad \rightarrow \quad (x-1)(x-10)>-(x+14)\geq x(x-10)$

$\rightarrow \begin{cases} x^2-10x+24>0 \\ x^2-9x+14\leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-4)(x-6)>0 \\ (x-2)(x-7)\leq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<4,\ \ 6<x \\ 2\leq x\leq 7 \end{cases} \rightarrow 2\leq x<4,\ \ 6<x\leq 7$



よって、この範囲で

$y=-\dfrac{x+14}{x-10}=-\dfrac{x-10+24}{x-10}=\dfrac{-24}{x-10}-1$ が整数となる x を探します。

（$x=y$ に注意します）

$x=2$ $(y=2)$，$x=7$ $(y=7)$

他に、橙色の点が候補です。

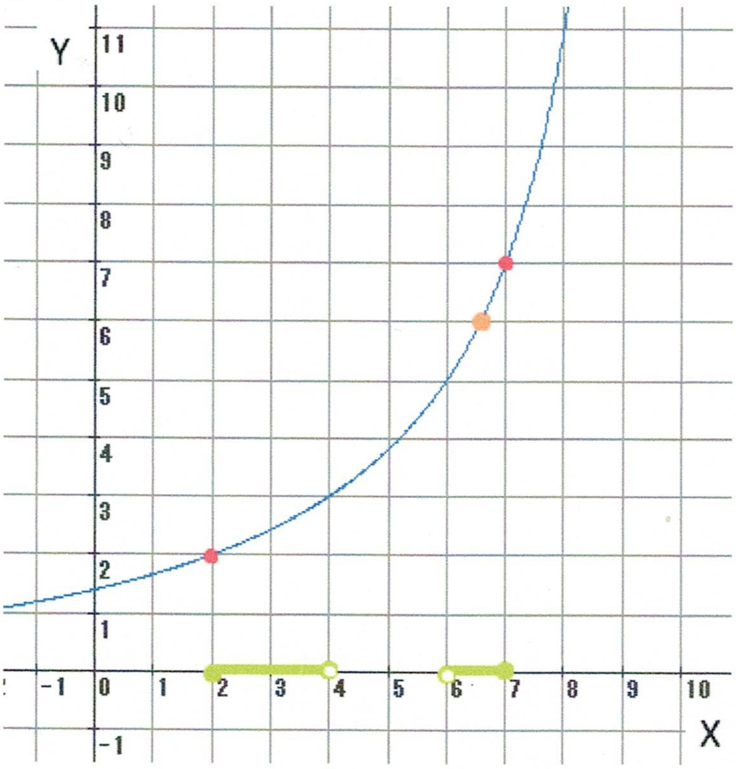
$6=\dfrac{-24}{x-10}-1 \quad \rightarrow \quad 7(x-10)=-24 \quad \rightarrow \quad x=10-\dfrac{24}{7}=\dfrac{46}{7}$

念のために、

$x[x]+x-10[x]+14=0$

$\rightarrow \dfrac{46}{7}\times\left[\dfrac{46}{7}\right]+\dfrac{46}{7}-10\times\left[\dfrac{46}{7}\right]+14=\dfrac{46}{7}\times 6+\dfrac{46}{7}-10\times 6+14=\dfrac{46}{7}\times 7-46=0$

より、OK です。

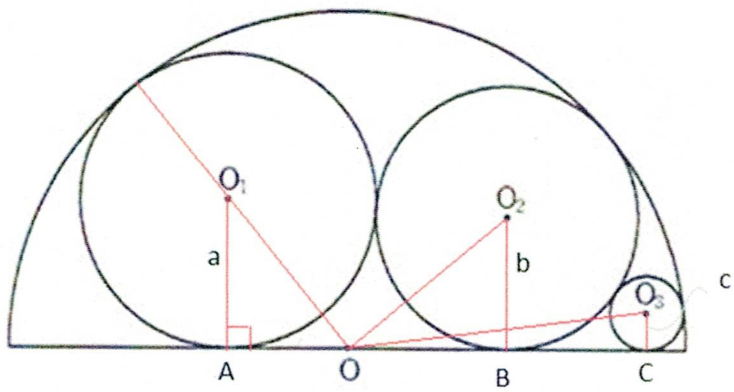


追加問題 1

各円の中心から直径に垂線を下ろします。

その足をそれぞれ A、B、C とします。

添え字をつけるのが手間なので、各円の半径をそれぞれ a 、 b 、 c とします。



ΔOO_1A に三平方の定理を用いると、

$OO_1{}^2 = O_1A^2 + AO^2 \quad \rightarrow \quad (R-a)^2 = a^2 + AO^2 \quad \rightarrow \quad AO = \sqrt{R^2 - 2aR}$

同様に、OB、OC も、$OB = \sqrt{R^2 - 2bR}$、$OC = \sqrt{R^2 - 2cR}$

また、AB、BC はそれぞれ、$AB = 2\sqrt{ab}$、$BC = 2\sqrt{bc}$ なので、

$$\begin{cases} AB = AO + OB \\ BC = OC - OB \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{ab} = \sqrt{R^2 - 2aR} + \sqrt{R^2 - 2bR} \\ 2\sqrt{bc} = \sqrt{R^2 - 2cR} - \sqrt{R^2 - 2bR} \end{cases}$$

ここで、$a = 4$、$c = 1$ を代入すると連立方程式は、

$$\begin{cases} 2\sqrt{4b} = \sqrt{R^2 - 2 \times 4R} + \sqrt{R^2 - 2bR} \\ 2\sqrt{b \times 1} = \sqrt{R^2 - 2 \times 1R} - \sqrt{R^2 - 2bR} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{b} = \sqrt{R^2 - 8R} + \sqrt{R^2 - 2bR} & \cdots \quad (1) \\ 2\sqrt{b} = \sqrt{R^2 - 2R} - \sqrt{R^2 - 2bR} & \cdots \quad (2) \end{cases}$$

(1)と(2)を加えると、

$6\sqrt{b} = \sqrt{R^2 - 8R} + \sqrt{R^2 - 2R} \quad \to \quad 6\sqrt{b} - \sqrt{R^2 - 2R} = \sqrt{R^2 - 8R}$

$\to \quad 36b - 12\sqrt{b}\sqrt{R^2 - 2R} + R^2 - 2R = R^2 - 8R \quad \to \quad 6b + R = 2\sqrt{b}\sqrt{R^2 - 2R}$

$\to \quad 36b^2 + 12Rb + R^2 = 4R^2b - 8Rb \quad \to \quad 36b^2 - 4(R^2 - 5R)b + R^2 = 0$

$\to \quad b = \dfrac{(R^2 - 5R) \pm R\sqrt{R^2 - 10R + 16}}{18}$

Rは、8より大きいので、試しにR=9とすると、

$$b = \frac{(R^2 - 5R) \pm R\sqrt{R^2 - 10R + 16}}{18} \quad \to \quad \frac{(81 - 45) \pm 9\sqrt{81 - 90 + 16}}{18} = \frac{36 \pm 9\sqrt{7}}{18} = \begin{cases} 3.3228\cdots & (+) \\ 0.6771\cdots & (-) \end{cases}$$

bは、cより大きいので、複号は「+」のときです。

$$b = \frac{(R^2 - 5R) + R\sqrt{R^2 - 10R + 16}}{18}$$

(2)の式を変形していきます。

$2\sqrt{b} = \sqrt{R^2 - 2R} - \sqrt{R^2 - 2bR} \quad \to \quad 2\sqrt{b} + \sqrt{R^2 - 2bR} = \sqrt{R^2 - 2R}$

$\to \quad 4b + 4\sqrt{b}\sqrt{R^2 - 2bR} + R^2 - 2bR = R^2 - 2R \quad \to \quad 2\sqrt{b}\sqrt{R^2 - 2bR} = (R - 2)b - R$

$\to \quad 4b(R^2 - 2Rb) = (R - 2)^2b^2 - 2R(R - 2)b + R^2$

$\to \quad \boldsymbol{(R^2 + 4R + 4)b^2 - (6R^2 - 4R)b + R^2 = 0} \quad \cdots \quad \textbf{(3)}$

ここで、

$$b^2 = \left\{\frac{(R^2 - 5R) + R\sqrt{R^2 - 10R + 16}}{18}\right\}^2 = \frac{R^2}{324}\left\{(2R^2 - 20R + 41) + (2R - 10)\sqrt{R^2 - 10R + 16}\right\}$$

$$b = \frac{(R^2 - 5R) + R\sqrt{R^2 - 10R + 16}}{18}$$

なので、

・bの2次の部分は、

$$(R^2 + 4R + 4)b^2 = \frac{R^2}{324}\left\{\underline{2R^4 - 12R^3 - 31R^2 + 84R + 164} + (2R^3 - 2R^2 - 32R - 40)\sqrt{R^2 - 10R + 16}\right\}$$

・bの1次の部分は、

$$-(6R^2 - 4R)b = -\frac{R^2}{36 \times 9}\left\{\underline{36(3R^2 - 17R + 10)} + 36(3R - 2)\sqrt{R^2 - 10R + 16}\right\}$$

・定数項は、$R^2 = \frac{R^2}{324} \times \underline{324}$

よって(3)は、

$$(R^2 + 4R + 4)b^2 - (6R^2 - 4R)b + R^2$$
$$= \frac{R^2}{324}\left\{\underline{2R^4 - 12R^3 - 31R^2 + 84R + 164} + (2R^3 - 2R^2 - 32R - 40)\sqrt{R^2 - 10R + 16}\right\}$$
$$-\frac{R^2}{36 \times 9}\left\{\underline{36(3R^2 - 17R + 10)} + 36(3R - 2)\sqrt{R^2 - 10R + 16}\right\}$$
$$+\frac{R^2}{324} \times \underline{324}$$
$$= \frac{R^2}{324}\left\{(2R^4 - 12R^3 - 139R^2 + 696R + 128) + (2R^3 - 2R^2 - 140R + 32)\sqrt{R^2 - 10R + 16}\right\} = 0$$

$R \neq 0$ なので、

$$\boldsymbol{(2R^4 - 12R^3 - 139R^2 + 696R + 128) = -(2R^3 - 2R^2 - 140R + 32)\sqrt{R^2 - 10R + 16}}$$

として解きます。

$\text{左辺}^2 = 4R^8 - 48R^7 - 412R^6 + 6120R^5 + 3129R^4 - 196560R^3 + 448832R^2 + 178176R + 16384$

$\text{右辺}^2 = 4R^8 - 48R^7 - 412R^6 + 6120R^5 + 3696R^4 - 192672R^3 + 402176R^2 - 153600R + 16384$

下の式から上の式を引くと、

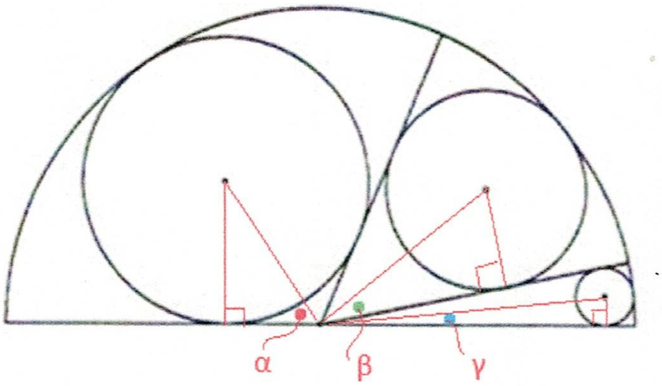
$567R^4+3888R^3-46656R^2-331776R=0 \quad \rightarrow \quad 81R(7R^3+48R^2-576R-4096)=0$

$\rightarrow \quad 81R(R+8)^2(7R-64)=0 \quad \rightarrow \quad R=0,-8,\dfrac{64}{7}$

よって、$R=\dfrac{64}{7}$

$$r_2=b=\frac{(R^2-5R)+R\sqrt{R^2-10R+16}}{18}=\frac{\left\{\left(\frac{64}{7}\right)^2-5\times\frac{64}{7}\right\}+\frac{64}{7}\sqrt{\left(\frac{64}{7}\right)^2-10\times\frac{64}{7}+16}}{18}=\frac{32}{9}$$

追加問題 2



半円の半径を r 、円の半径をそれぞれ左から 10、7、2 とします。

半円の中心とそれぞれの内接円の中心を斜辺とする直角三角形を考えます。

その 1 内角をそれぞれ α、β、γ とすれば、

$\sin\alpha=\dfrac{10}{r-10}$、 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{r^2-20r}}{r-10}$、 $\sin\beta=\dfrac{7}{r-7}$、 $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{r^2-14r}}{r-7}$、 $\sin\gamma=\dfrac{2}{r-2}$

ここで、

$\sin\gamma=\sin\{90^\circ-(\alpha+\beta)\}=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{r^2-20r}}{r-10}\times\dfrac{\sqrt{r^2-14r}}{r-7}-\dfrac{10}{r-10}\times\dfrac{7}{r-7}=\dfrac{2}{r-2}$

$\rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{r^2-20r}}{r-10}\times\dfrac{\sqrt{r^2-14r}}{r-7}=\dfrac{10}{r-10}\times\dfrac{7}{r-7}+\dfrac{2}{r-2}$

$\rightarrow \quad (r-2)\sqrt{r^2-20r}\sqrt{r^2-14r}=70(r-2)+2(r-10)(r-7)$

$\rightarrow \quad (r-2)\sqrt{r^2-20r}\sqrt{r^2-14r}=2r^2+36r$

$\rightarrow \quad (r^2-4r+4)(r^2-20r)(r^2-14r)=4r^4+144r^3+1296r^2$

$\rightarrow \quad r^2(r^4-38r^3+420r^2-1256r+1120)=r^2(4r^2+144r+1296)$

$\rightarrow \quad r^2(r^4-38r^3+416r^2-1400r-176)=0$

$\rightarrow \quad r^2(r-22)(r^3-16r^2+64r+8)=0$

ここで、$f(r)=r^3-16r^2+64r+8$ とおくと、

$f'(r)=3r^2-32r+64=0 \quad \rightarrow \quad r=\dfrac{8}{3},8$ で $f'(r)=0$

x	…	$\frac{8}{3}$	…	8	…
$f'(r)$	+	0	−	0	+
$f(r)$	↗	$\frac{2264}{27}$	↘	8	↗

よってもう 1 つの実数解は $\frac{8}{3}$ より小さいので、半円の半径は 22 です。