● 問題 449 解答＜三角定規＞

［問題］

(1) $[x^2]-[x]-2x=0$ …<11>

$x^2-1<[x^2]$, $x-1<[x]$ より， $x^2-x-2=(x+1)(x-2)<[x^2]+[x]-2x$ …<12>

(ⅰ) $x\leqq -1$, $2\leqq x$ のとき，$x^2-x-2\geqq 0$ 及び <12> より，与式<11>は解をもたない。

(ⅱ) $-1<x<0$ のとき，$0<x^2<1$ だから，$[x^2]=0$, $[x]=-1$, $0<-2x<2$ だから $x=-\dfrac{1}{2}$ が与式の解。

(ⅲ) $0\leqq x<1$ のとき，$[x^2]=[x]=0$, $-2<2x\leqq 0$ だから，$x=0$ が与式の解。

(ⅳ) $1\leqq x<\sqrt{2}$ のとき，$1\leqq x^2<2$, $[x^2]=[x]=1$, $-2\sqrt{2}<-2x\leqq -2$ だから，$x=1$ が与式の解。

(ⅴ) $\sqrt{2}\leqq x<\sqrt{3}$ のとき，$2\leqq x^2<3$, $[x^2]=2$, $[x]=1$, $-2\sqrt{3}<-2x\leqq -2\sqrt{2}$ だから，$x=\dfrac{3}{2}$ が解。

(ⅵ) $\sqrt{3}\leqq x<2$ のとき，$3\leqq x^2<4$, $[x^2]=3$, $[x]=1$, $-4<-2x\leqq -2\sqrt{3}$ だから与式の解はなし。

以上より，与式 <11> の解は，$x=-\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ …[答]

(2) $[x^2]+[x]=0$ …<21>

$x^2-1<[x^2]\leqq x^2$, $x-1<[x]\leqq x$ だから，$x^2+x-2=(x-1)(x+2)<[x^2]+[x]\leqq x^2+x$ …<22>

(ⅰ) $x\leqq -2$, $1\leqq x$ のとき，$x^2+x-2>0$ 及び <22> より，与式<21>は解をもたない。

(ⅱ) $-2<x\leqq -\sqrt{3}$ のとき，$3\leqq x^2<4$, $[x^2]=3$, $[x]=-2$ だから，与式は解をもたない。

(ⅲ) $-\sqrt{3}<x\leqq -\sqrt{2}$ のとき，$2\leqq x^2<3$, $[x^2]=2$, $[x]=-2$ だから，この間のすべての x は与式の解。

(ⅳ) $-\sqrt{2}<x<-1$ のとき，$1<x^2<2$, $[x^2]=1$, $[x]=-2$ だから，解なし。

(ⅴ) $x=-1$ のとき，$[x^2]=1$, $[x]=-1$ より，$x=-1$ は与式の解。

(ⅵ) $-1<x<0$ のとき，$x^2+x<0$ だから<22>より，解なし。

(ⅶ) $0\leqq x<1$ のとき，$[x^2]=[x]=0$ だから，この間の x はすべて与式の解。

以上より， 与式 <21> の解は，$\boldsymbol{-\sqrt{3}<x\leqq -\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{x=-1}$, $\boldsymbol{0\leqq x<1}$ …[答]

(3) $x^2-[2x]=0$ …<31>

(ⅰ) $x<0$ のとき，$x^2>0$, $[2x]<0$ だから，与式は解をもたない。

(ⅱ) $0\leqq x<\dfrac{1}{2}$ のとき，$[2x]=0$ だから，与式の解は $x=0$。

(ⅲ) $\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ のとき，$\dfrac{1}{4}\leqq x^2<1$, $[2x]=1$ だから，解なし。

(ⅳ) $1\leqq x<\dfrac{3}{2}$ のとき，$1\leqq x^2<\dfrac{9}{4}$, $[2x]=2$ だから，$x=\sqrt{2}$ が解。

(ⅴ) $\dfrac{3}{2}\leqq x<2$ のとき，$\dfrac{9}{4}\leqq x^2<4$, $[2x]=3$ だから，$x=\sqrt{3}$ が解。

(ⅵ) $2\leqq x<\dfrac{5}{2}$ のとき，$4\leqq x^2<\dfrac{25}{4}$, $[2x]=4$ だから，$x=2$ が解。

(ⅶ) $\dfrac{5}{2}\leqq x$ のとき，$[2x]\leqq 2x$ より $0<x^2-2x\leqq x^2-[2x]$ だから，解なし。

以上より，与式<31>の解は $x=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{\sqrt{3}}$, $\mathbf{2}$ …[答]

(4) $x^2+2[x]-15=0 \quad \cdots<41>$

$x-1<[x]\leqq x$ だから，

$$x^2+2x-17<x^2+2[x]-15 \quad \cdots<42>, \qquad x^2+2[x]-15\leqq x^2+2x-15=(x+5)(x-3) \quad \cdots<43>$$

(ⅰ) $x\leqq -6$ のとき，$7\leqq x^2+2x-17$ だから <42>より，与式<41>は解なし。

(ⅱ) $-6<x<-5$ のとき，$[x]=-6$, 与式に戻し $x^2=27$, $\therefore\ x=-3\sqrt{3}$ が解。

(ⅲ) $x=-5$ のとき，$x^2=25$, $[x]=-5$ だから $x=-5$ は解。

(ⅳ) $-5<x<3$ のとき $(x+5)(x-3)<0$ だから <43>より 解なし。

(ⅴ) $x=3$ のとき，$x^2=9$, $[x]=3$ だから $x=3$ は解。

(ⅵ) $x>3$ のとき，$x^2>9$, $[x]\geqq 3$ だから，解なし。

以上より，与式<41>の解は $\boldsymbol{x=-3\sqrt{3},\ -5,\ 3}$ $\cdots$[答]

(5) $x[x]+x-10[x]+14=0 \quad \cdots<51>$

与式の左辺を y とおく。$x-1<[x]\leqq x$ より，

$x<0$ のとき，$x^2\leqq x[x]<x^2-x$, $\quad\therefore\ x^2-9x+14\leqq y<x^2-10x+24 \quad \cdots<52>$

$0\leqq x$ のとき，$x^2-x<x[x]\leqq x^2$, $\quad\therefore\ x^2-10x+14<y\leqq x^2-9x+24 \quad \cdots<53>$

(ⅰ) $x<0$ のとき，$x^2-9x+14>0$ 及び<52>より 与式は解をもたない。

(ⅱ) $0\leqq x<1$ のとき，$x^2-10x+14>0$ 及び<53>より 与式は解をもたない。

(ⅲ) $1\leqq x<2$ のとき，$[x]=1$, $\therefore\ y=2x+4\geqq 6$, よって，解なし。

(ⅳ) $2\leqq x<3$ のとき，$[x]=2$, $\therefore\ y=3x-6$, よって，$x=2$ が与式の解。

(ⅴ) $3\leqq x<4$ のとき，$[x]=3$, $\therefore\ y=4x-16<0$, よって，解なし。

(ⅵ) $4\leqq x<5$ のとき，$[x]=4$, $\therefore\ y=5x-26<0$, よって，解なし。

(ⅶ) $5\leqq x<6$ のとき，$[x]=5$, $\therefore\ y=6x-36<0$, よって，解なし。

(ⅷ) $6\leqq x<7$ のとき，$[x]=6$, $\therefore\ y=7x-46$, よって，$x=\dfrac{46}{7}$ が与式の解。

(ⅸ) $7\leqq x<8$ のとき，$[x]=7$, $\therefore\ y=8x-56$, よって，$x=7$ が与式の解。

(ⅹ) $8\leqq x<9$ のとき，$[x]=8$, $\therefore\ y=9x-66>0$, よって，解なし。

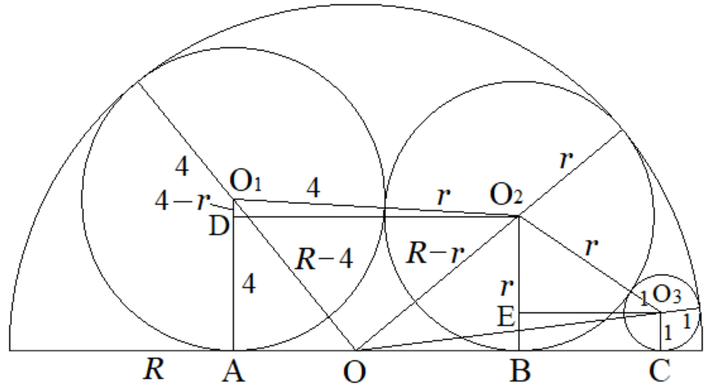
(xi) $9\leqq x$ のとき，$5<x^2-10x+14$ 及び<53>より 与式は解をもたない。

以上より，与式<51>の解は $\boldsymbol{x=2,\ \dfrac{46}{7},\ 7}$ $\cdots$[答]

《追加問題》

［問題１］

半円の半径を R, 円 O_2 の半径を r とし，右図のように各点を定める。



直角三角形 O_1O_2D の 3 辺の関係より，

$$O_1O_2^2-O_1D^2=DO_2^2 \quad \cdots①$$

ここで，

$$O_1O_2=4+r,\ O_1D=4-r$$

$$DO_2=AO+OB$$
$$=\sqrt{(R-4)^2-4^2}+\sqrt{(R-r)^2-r^2}$$
$$=\sqrt{R^2-8R}+\sqrt{R^2-2Rr}$$

これらを①に代入し

$$(4+r)^2-(4-r)^2=(\sqrt{R^2-8R}+\sqrt{R^2-2Rr})^2 \quad \cdots②$$

②の計算を実行し整理すると，

$$R^2r^2-24R^2r+16R^2+16Rr^2+64Rr+64r^2=0 \quad \cdots③$$

次に，直角三角形 O_2O_3E の 3 辺について，①～③を導いた過程と全く同様にして，

$$R^2r^2-6R^2r+R^2+4Rr^2+4Rr+4r^2=0 \quad \cdots④$$

さらに，$\dfrac{④\times 4-③}{3}$ ： $R^2r^2-4R^2-16Rr-16^2=(Rr-2R-4r)(Rr+2R+4r)=0$

$Rr+2R+4r>0$ だから，$Rr-2R-4r=0 \quad \therefore\ r=\dfrac{2R}{R-4} \quad \cdots⑤$

⑤を④に戻して，$(R+2)^2\cdot\dfrac{4R^2}{(R-4)^2}-(6R^2-4R)\cdot\dfrac{2R}{R-4}+R^2=0$

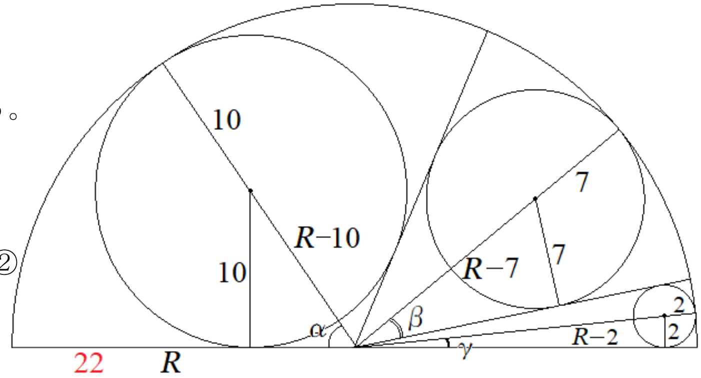
整理して，$(R+2)^2\cdot 4R^2-(6R^2-4R)\cdot 2R(R-4)+R^2(R-4)^2=R^3(64-7R)=0$

$R>0$ より，$R=\dfrac{64}{7}$，⑤に戻して $r=\dfrac{32}{9}$

以上より，半円 O の半径＝$\mathbf{\dfrac{64}{7}}$，円 O_2 の半径＝$\mathbf{\dfrac{32}{9}}$ …[答]

［問題２］

半円の半径を R とする。円が内接している扇形の中心角の $\frac{1}{2}$ を図のように α, β, γ とする。



このとき，$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ …①

$$\sin\alpha=\frac{10}{R-10},\ \sin\beta=\frac{7}{R-7},\ \sin\gamma=\frac{2}{R-2}\ \cdots②$$

であり, ②より

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{R^2-20R}}{R-10},\ \cos\beta=\frac{\sqrt{R^2-14R}}{R-7},$$

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{R^2-4R}}{R-2},\ R>20\ \cdots③$$

である。①より,

$$\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

②③を代入し,

$$\frac{7\sqrt{R^2-4R}+2\sqrt{R^2-14R}}{(R-2)(R-7)}=\frac{\sqrt{R^2-20R}}{R-10}$$

$$\therefore\ \frac{7\sqrt{R-4}+2\sqrt{R-14}}{(R-2)(R-7)}=\frac{\sqrt{R-20}}{R-10}\ \cdots④$$

④の分母を払い, 両辺を平方して整理すると,

$$28(R-10)^2\sqrt{R-4}\sqrt{R-14})=(R-2)^2(R-7)^2(R-20)-(R-10)^2(53R-252)\ \cdots⑤$$

⑤を再度両辺平方し整理整頓すると,

$$(R-22)(R^3-16R^2+64R+8)(R^6-38R^5+416R^4-840R^3-10816R^2+58240R-78400)=0\ \cdots⑥$$

⑥より，$R=22$ は④のひとつの解である。

②より R が大きくなると α, β, γ は全て小さくなり，R が小さくなると全て大きくなるので，R が 22 と異なる場合, それらから導かれる α, β, γ は①を満たさない。

よって，$R=22$ が④を満たす唯一の解である。以上より，求める半円の半径は **22** …[答]

（以上, 計算は全て WolframAlpha にやってもらいました。）