算額あれこれ

算額問題をコンピュータで解きます

2025-08-07

算額（その1816）

Julia 算額

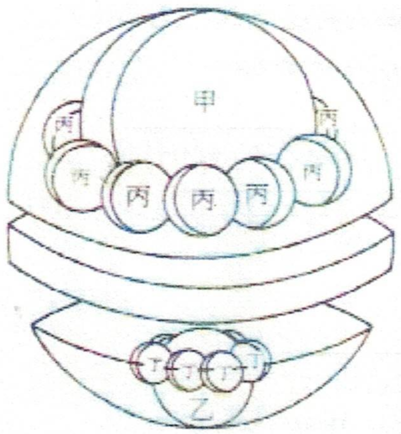
岐阜県大垣市西外側町 大垣八幡宮 天保年間

http://www.wasan.jp/gifu/ogakihatiman.html

キーワード：3球プラスα，3次元

#Julia #SymPy #算額 #和算 #数学

外球を上中下の 3 段に分割し，上段には 1 個の甲球と数個の丙球，下段には 1 個の乙球と数個の丁球を容れる。
中段には何も容れない。丙球，丁球はそれぞれ，甲球（または乙球）と外接し，外球に内接し，外球を切断した面と外接する。
外球，甲球，乙球の直径が与えられたとき，丙球，丁球の個数を求めよ。



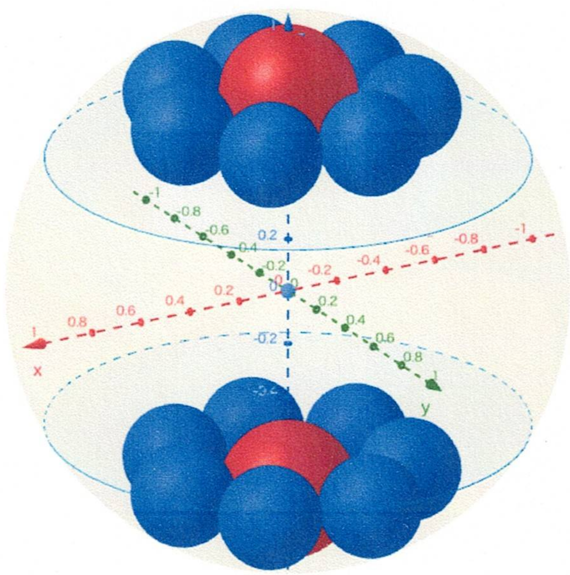
本算額は「算額（その1815）」の「続神壁算法 11 東都愛宕山 文化2年(1805) 南筑□藩 藤田貞資門人 筑州□府 城崎庄右衛門方正」の問題を簡約化したものである。

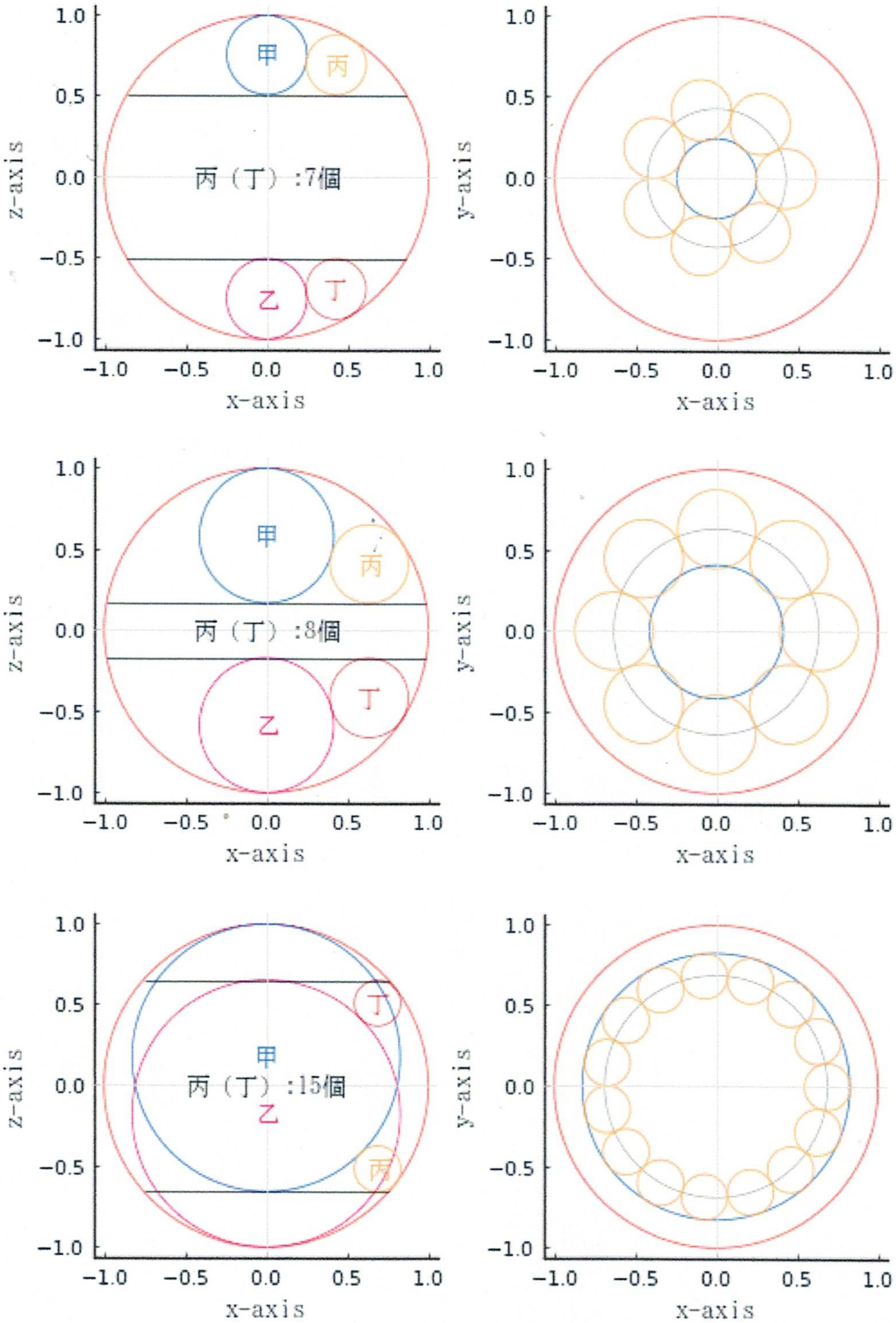
「続神壁算法」では上段と下段の中心にある球の大きさが違うが，この算額問題では，上下は対称（合同）である（図には「続神壁算法」にあるような非対称な図が描かれていて人を惑わすが，問題文には「甲乙球は『段矢』が等しい」と書いてある）。

したがって，以下では上段にある甲球と丙球について考える。

問題文は「外球，甲球の直径を知って，丙球の個数を求めよ」ということになる。

以下は丙球が 7 個の場合である。





外球の半径と中心座標を $R, (0,0,0)$

甲球の半径と中心座標を $r_1, (0, 0, R-r_1)$

丙球の個数，半径と中心座標を $n_2, r_2, (2\sqrt{r_1\, r_2}, 0, R-2r_1+r_2)$

とおく。

まず，甲球と丙球に関する条件式を定義する。

なお，以下では $R=1$ としても一般性を失わない。

```
include("julia-source.txt");  # julia-source.txt ソース
```

```
using SymPy
@syms R::positive, r1::positive, r2::positive, n2::positive
R = 1
# 丙球は甲球と外接し，外球に内接し，外球を切断した底面と外接する
eq1 = (2sqrt(r1*r2))^2 + (R - 2r1 + r2)^2 - (R - r2)^2
# 丙球は隣同士と（隙間なく）外接する
eq2 = 2sqrt(r1*r2)*sind(Sym(180)/n2) - r2;
```

```
eq1 |> display
eq2 |> display
```

$$4r_1r_2 - (1 - r_2)^2 + (-2r_1 + r_2 + 1)^2$$

$$2\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\sin\left(\frac{\pi}{n_2}\right) - r_2$$

結論を先に述べると，丙球の個数は 7 以上，12 以下が可能である（と，森島幽斎の解で書かれているが，上限はないはず）。

しかし，外球を 3 個に分断するという制約条件として $R > 2r_1$ でなければならないので，丙球の個数は 7, 8 個の場合だけが適解である。

また，外球の直径，甲球（乙球）の直径を与えるというが，以下で示される値以外を与えると，当然のことではあるが丙球（丁球）は互いにきっちり外接することはない。

丙球が 7 個の場合

上述の方程式 eq2 において，$n_2 = 7$ として方程式を解く。

```
res = solve([eq1, eq2(n2 => 7)], (r1, r2))[1];
```

```
# r1 甲球の半径
@show(res[1])
```

```
res[1] = 1/2 - sqrt(16*(1 - 2*cos(2*pi/7))*sin(pi/7)^2 + 1)/2
```

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{16\left(1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1}}{2}$$

```
res[1](r1 => 7.8/2).evalf() |> println
```

```
  0.414213562373098*R

# r2
@show(res[2])

  res10[2] = R*(-4 + 3*sqrt(2))
```

$$R\left(-4+3\sqrt{2}\right)$$

```
res[2](r1 => 7.8/2).evalf() |> println

  0.242640687119286*R
```

丙球が 8 個以上の場合も eq2(n2 => *) の部分だけ変えればよいので，以下のように for ループで計算できる。

```
function result(n)
  # 丙球は甲球と外接し，外球に内接し，外球を切断した底面と外接する
  eq1 = (2sqrt(r1*r2))^2 + (R - 2r1 + r2)^2 - (R - r2)^2
  # 丙球は隣同士と（隙間なく）外接する
  eq2 = 2sqrt(r1*r2)*sind(Sym(180)/n2) - r2;
  @printf("丙球（丁球）の個数が %d のとき\n", n)
  res = solve([eq1, eq2(n2 => n)], (r1, r2))[1];
  println("外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径")
  @show(res[1])
  res[1].evalf() |> println
  res[1] > 0.5 && println("甲球の半径が外球の半径の 1/2 より大きいので，不適解である")
  println("外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径")
  @show(res[2])
  res[2].evalf() |> println
  println()
end;

for n = 7:12
  result(n)
end
```

丙球（丁球）の個数が 7 のとき

外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径

res[1] = 1/2 - sqrt(16*(1 - 2*cos(2*pi/7))*sin(pi/7)^2 + 1)/2

0.246979603717467

外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径

res[2] = (-4 + 8*cos(2*pi/7))*sin(pi/7)^2

0.185980679065030

丙球（丁球）の個数が 8 のとき

外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径

res[1] = 1/2 - sqrt(17 - 12*sqrt(2))/2

0.414213562373095

外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径

res[2] = -4 + 3*sqrt(2)

0.242640687119285

丙球（丁球）の個数が 9 のとき

外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径

res[1] = -1 + 2*cos(2*pi/9)

0.532088886237956

甲球の半径が外球の半径の 1/2 より大きいので，不適解である

外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径

res[2] = -16*sin(pi/9)^4 + 4*sin(pi/9)^2

0.248970303380008

丙球（丁球）の個数が 10 のとき

外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径

res[1] = sqrt(9 - 4*sqrt(5))/2 + 1/2

0.618033988749895

甲球の半径が外球の半径の 1/2 より大きいので，不適解である

外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径

res[2] = -2 + sqrt(5)

0.236067977499790

丙球（丁球）の個数が 11 のとき

外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径

res[1] = -1 + 2*cos(2*pi/11)

0.682507065662362

甲球の半径が外球の半径の 1/2 より大きいので，不適解である

外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径

res[2] = -16*sin(pi/11)^4 + 4*sin(pi/11)^2

0.216691170983314

丙球（丁球）の個数が 12 のとき

外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径

res[1] = sqrt(21 - 12*sqrt(3))/2 + 1/2

0.732050807568877

甲球の半径が外球の半径の 1/2 より大きいので，不適解である

外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径

res[2] = -5 + 3*sqrt(3)

0.196152422706632

result(6)

丙球（丁球）の個数が 6 のときはエラーが出る（解はない）

なお，$R > 2r_1$ の条件を満たさなくてもよいならば，丙球の個数に上限はない。

result(15)

丙球（丁球）の個数が 15 のとき

外球の半径を 1 としたとき，甲球の半径

res10[1] = sqrt(-6*sqrt(30)*sqrt(sqrt(5) + 5) - 16*sqrt(5) + 60 + 10*sqrt(6)*sqrt(sqrt(5) + 5))/4 + 1/2

0.827090915285202

甲球の半径が外球の半径の 1/2 より大きいので，不適解である

外球の半径を 1 としたとき，丙球の半径

res10[2] = -5*sqrt(6*sqrt(5) + 30)/8 - 7/2 + sqrt(5) + 3*sqrt(30*sqrt(5) + 150)/8

0.143011533137889

▶ 描画関数プログラムのソースを見る