

第450回 設問3 別解

設問3 $\left[\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}} \right]$ を求めよ。〈2014年 大阪大学入試問題の類題〉

〔解答〕 自然数 k について、 $2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$ であるから、 $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

$$\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{2025} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(\sqrt{2026} - 1) = 88.02\cdots \quad \dots\textcircled{1}$$

また、 $\sqrt{k} + \sqrt{k+1} < 2\sqrt{k+1}$ であるから、 $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

$$\sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{2024} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(\sqrt{2025} - 1) = 88$$

両辺に1を加えると、 $1 + \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}} < 89 \quad \dots\textcircled{2}$

①, ②より、 $\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}}$ の整数部分は88であるから、 $\left[\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}} \right] = 88$ 〔答〕

(2025/1/4 ジョーカー)