第 450 回

設問 1　$[[x]^2+2x]=2025$ となる実数 x の範囲を求めよ。

解答　$[[x]^2+2x]=2025$ より，$2025 \leqq [x]^2+2x < 2026$　$\therefore \dfrac{2025-[x]^2}{2} \leqq x < \dfrac{2026-[x]^2}{2}$　…①

[1]　$x \geqq 0$ のとき

(1)　$[x] \geqq 45$ のとき，$i.e.$ $45 \leqq x$ のとき，①は，$x < \dfrac{1}{2}$　共通範囲は，なし

(2)　$[x]=44$ のとき，$i.e.$ $44 \leqq x < 45$ のとき，①は，$\dfrac{89}{2} \leqq x < 45$　共通範囲は，$\dfrac{89}{2} \leqq x < 45$

(3)　$[x] \leqq 43$ のとき，$i.e.$ $x < 44$ のとき，①は，$88 \leqq x$　共通範囲は，なし

[2]　$x < 0$ のとき

(1)　$[x] \leqq -45$ のとき，$i.e.$ $x < -46$ のとき，①は，$0 \leqq x$　共通範囲は，なし

(2)　$[x]=-46$ のとき，$i.e.$ $-46 \leqq x < 45$ のとき，①は，$-\dfrac{91}{2} \leqq x < -45$　共通範囲は，$-\dfrac{91}{2} \leqq x < -45$

(3)　$[x] \leqq -47$ のとき，$i.e.$ $-47 \leqq x$ のとき，①は，$x < -\dfrac{183}{2}$　共通範囲は，なし

以上より，求める x の範囲は，$-\dfrac{91}{2} \leqq x < -45$ ，$\dfrac{89}{2} \leqq x < 45$　答

設問 2　$\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}\right]=2025$ を満たす自然数 n をすべて求めよ。

解答　$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ であるから，$2025 \leqq \sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}} < 2026$　…①を満たす自然数 n を求める。

$\sqrt{\dfrac{n^2}{2}} < \sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}} < \sqrt{\dfrac{(n+1)^2}{2}}$ より，$\dfrac{n}{\sqrt{2}} < \sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}} < \dfrac{n+1}{\sqrt{2}}$　…②

①，②より，$2025 < \dfrac{n+1}{\sqrt{2}}$ ，$\dfrac{n}{\sqrt{2}} < 2026$　$2025\sqrt{2}-1 < n < 2026\sqrt{2}$　$\therefore 2862.7\cdots < n < 2865.1\cdots$

n は自然数であるから，$n=2863, 2864, 2865$

[1]　$n=2863$ のとき，$\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}=2024.8\cdots$

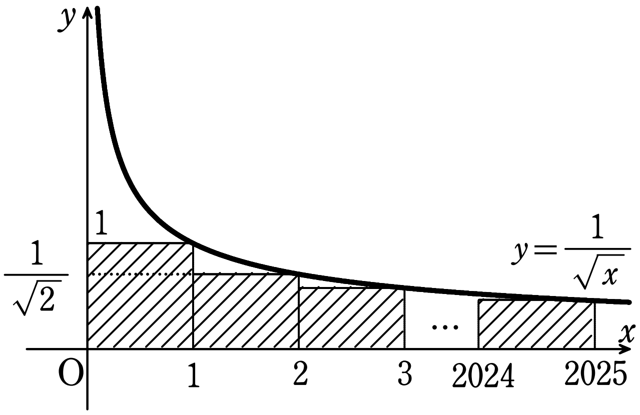
[2]　$n=2864$ のとき，$\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}=20254.5\cdots$

[3]　$n=2865$ のとき，$\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}=2026.2\cdots$

この中で，①を満たすのは，$n=2864$　答

設問 3　$\left[\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}}\right]$ を求めよ。<2014 年　大阪大学入試問題の類題>

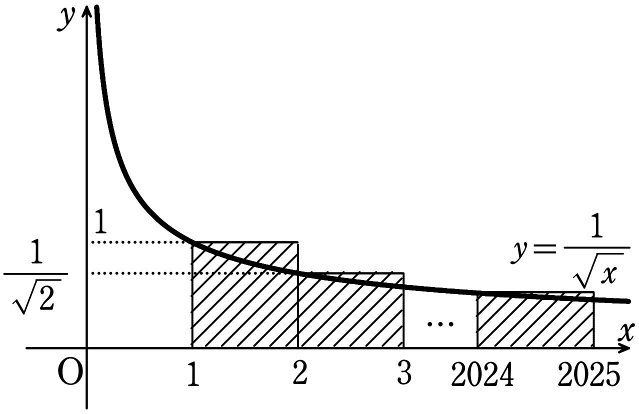
解答　$\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}}$ は，次の図の斜線部分の面積の和に等しい。



図から　$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}} < \int_1^{2025} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

よって　$\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \int_1^{2025} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1 + \left[2\sqrt{x}\right]_1^{2025} = 89$　……①

また，次の図から　$\int_1^{2025} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}}$



よって　$\sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{2025} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\sqrt{2025}} = 88 + \frac{1}{45}$　……②

①，②から　$88 + \frac{1}{45} < \sum_{n=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{n}} < 89$

よって，$\left[\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}}\right] = 88$　答

設問4　2025以下の自然数について，$[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか。<2012年　東京工業大学入試問題の類題＞

解答　$[\sqrt{n}]=k$ とおくと，k は正の整数であり

$$k \leqq \sqrt{n} < k+1 \qquad よって \qquad k^2 \leqq n < k^2+2k+1$$

すなわち　$n=k^2,\ k^2+1,\ \cdots\cdots,\ k^2+2k$

このうち，k の倍数となるような n は，小さい順に

$$k\cdot k=k^2,\quad k\cdot(k+1)=k^2+k,\quad k\cdot(k+2)=k^2+2k$$

の3個である。

$\sqrt{1}=1$，$\sqrt{2025}=45$ であるから　$1 \leqq k \leqq 45$

$1 \leqq k \leqq 44$ のとき　$k^2+2k<2025$

よって，k^2，k^2+k，k^2+2k の3つとも2025を超えないから，k が n の約数となる整数 n は各 k について3個ずつある。

$k=45$ のとき　$k^2=2025$

よって，2025を超えないのは k^2 のみであるから，k が n の約数となる整数 n は1個である。

異なる k の値に対して，n の値も異なるから，求める個数は

$$44\times3+1=133\ (個)$$ 答

追加問題1

1から9の順に並んだ9つの数字の間に加減乗除の記号を入れて，その結果を2025にせよ。

(1)　括弧を使わないとき

(2)　括弧を1組使うとき

答

(1)　$1\times2+345\times6-7\times8+9=2025$，など

(2)　①　$12\times(34+56+78)+9=2025$

②　$12-34+(5\times6-7)\times89=2025$

③　$12\times34\times5+6\times(7-8)-9=2025$

④　$12\times34\times5-6+(7-8)\times9=2025$

⑤　$(1+234-5-6-7+8)\times9=2025$

⑥　$1+23\times(45+6\times7-8+9)=2025$

⑦　$1+23\times(4\times5+67-8+9)=2025$

⑧　$1+(2+34)\times56+7-8+9=2025$

⑨　$1+2+3+(4\times5+6)\times78-9=2025$

⑩　$1\times2\times3+(4\times5+6)\times78-9=2025$

⑪　$-12-3+4\times5\times(6+7+89)=2025$

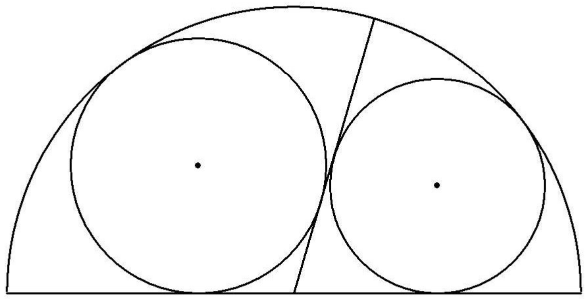
⑫　$1\times2\times(34\times5\times6-7)+8-9=2025$

⑬　$12-3+4\times(-5+6)\times7\times8\times9=2025$

⑭　$(1-2+3+4+5\times6)\times7\times8+9=2025$，など

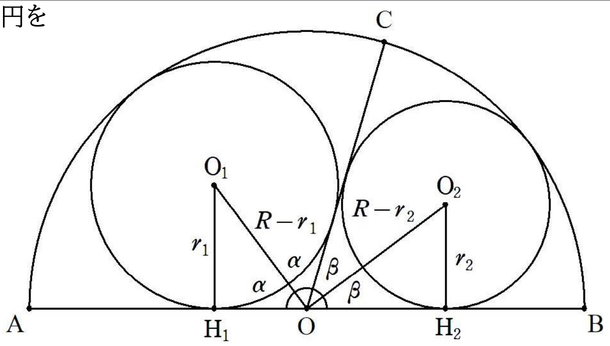
追加問題２

図のように半円を２つの扇形に分割し，それらに半径 32， 27 の円を内接させる。このとき，半円の半径を求めよ。



解答　半円を $\mathrm{O}(R)$，直径を AB とし，２つの扇形に内接する円を $\mathrm{O_1}(r_1)$，$\mathrm{O_2}(r_2)$ とする。（$r_1=32$， $r_2=27$ ）

$\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ から AB に下した垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とし，$\angle \mathrm{O_1OH_1}=\alpha$，$\angle \mathrm{O_2OH_2}=\beta$ とおくと，$\alpha+\beta=90^\circ$ である。



$\sin\alpha=\dfrac{r_1}{R-r_1}$， $\sin\beta=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha=\dfrac{r_2}{R-r_2}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より，$\left(\dfrac{r_1}{R-r_1}\right)^2+\left(\dfrac{r_2}{R-r_2}\right)^2=1$

分母を払って R について整理すると，$R^4-2(r_1+r_2)R^3+4r_1r_2R^2-r_1{}^2r_2{}^2=0$

ここで，$r_1=32$， $r_2=27$ を代入すると， $R^4-118R^3+3456R^2-746496=0$

因数分解すると，$(R-72)(R^3-46R^2+144R+10368)=0$

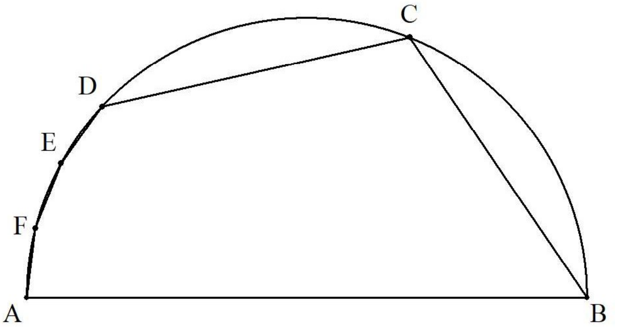
題意より， $R>2r_2=54$ であるから， $R^3-46R^2+144R+10368=R^2(R-46)+144R+10368>0$ より，

$R=72$

よって，半円の半径は， 72　答

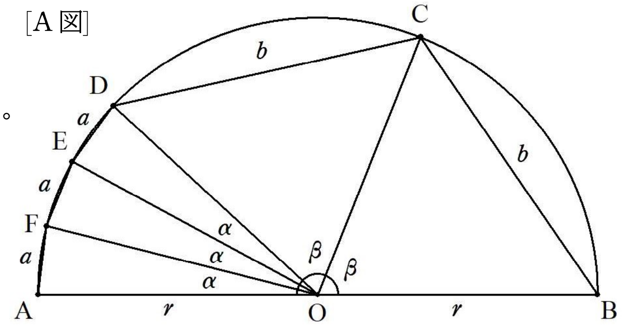
追加問題３

ABを直径とする半円周上に４点C，D，E，Fを，BC＝CD＝9，DE＝EF＝FA＝2となるようにとる。
このとき，ABを求めよ。



解答　ABの中点をO，半径をr，DE＝EF＝FA＝a，BC＝CD＝b，∠DOE＝∠EOF＝∠FOA＝α，∠BOC＝∠COD＝βとおく。[A図]

[A図]



中心角α，βの二等辺三角形を[B図]のように配置を換える。
E′F′，D′Aの中点をそれぞれM，Nとすると，

△OF′Mについて，$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a}{2r}$

△OD′Nについて，$\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{b}{2r}$

$\dfrac{3\alpha}{2}+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\dfrac{3\alpha}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$

$3\sin\dfrac{\alpha}{2}-4\sin^3\dfrac{\alpha}{2}=\cos\beta=1-2\sin^2\dfrac{\beta}{2}$

$3\cdot\dfrac{a}{2r}-4\left(\dfrac{a}{2r}\right)^3=1-2\left(\dfrac{b}{2r}\right)^2$

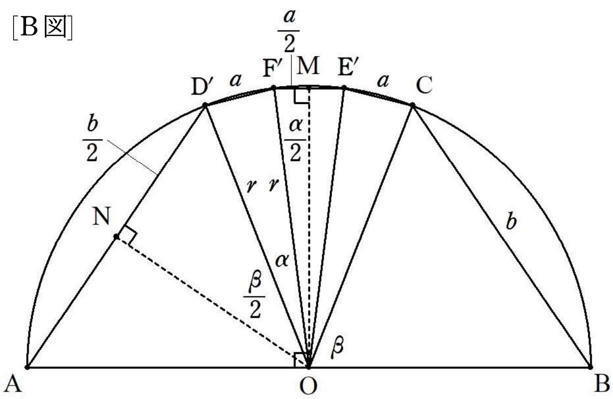
両辺に$2r^3$を掛けて整理すると，$2r^3-3ar^2-b^2r+a^3=0$

ここで，$a=2$，$b=9$ を代入すると，

$2r^3-6r^2-81r+8=0$　　$(r-8)(2r^2+10r-1)=0$

$r=8$，$\dfrac{-5\pm3\sqrt{3}}{2}$

[B図]



題意に適するのは，$r=8$（$\because\ \dfrac{-5-3\sqrt{3}}{2}<0$，$\dfrac{-5+3\sqrt{3}}{2}<1$）

よって，AB＝$2r=16$　答

（2025/1/2　ジョーカー）