設問1　外側のガウス記号を外して、$[[x]^2+2x]=[x]^2+[2x]$とします。地道にxで場合分けして、ガウス記号を外します。

①$x\geq 0$の場合

$$\left.\begin{array}{c}(x-1)^2<[x]^2\leq x^2\\ 2x-1<[2x]\leq 2x\end{array}\right\}\Rightarrow (x-1)^2+2x-1<[x]^2+[2x]\leq x^2+2x$$

なので、

$(x-1)^2+2x-1<2025\Rightarrow -45<x<45$

$2025\leq x^2+2x\Rightarrow x\leq -1-\sqrt{2026}, x\geq -1+\sqrt{2026}$

です。これらの条件を合わせると、$-1+\sqrt{2026}\leq x<45$ですが、この区間を調べると、以下の通りです。

⑴$-1+\sqrt{2026}\leq x<44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$の場合

$[x]^2+[2x]=1936+88=2024\Rightarrow\times$

⑵$\frac{89}{2}\leq x<44+1=45$の場合

$[x]^2+[2x]=1936+89=2025\Rightarrow\bigcirc$

②$x<0$の場合

$$\left.\begin{array}{c}x^2\leq [x]^2<(x-1)^2\\ 2x-1<[2x]\leq 2x\end{array}\right\}\Rightarrow x^2+2x-1<[x]^2+[2x]<(x-1)^2+2x$$

なので、

$x^2+2x-1<2025\Rightarrow -1-\sqrt{2027}<x<-1+\sqrt{2027}$

$2025<(x-1)^2+2x\Rightarrow x<-2\sqrt{506}, x>2\sqrt{506}$

です。これらの条件を合わせると、$-1-\sqrt{2027}<x<-2\sqrt{506},$ですが、この区間を調べると、以下の通りです。

⑴$-1-\sqrt{2027}<x<-46$の場合

$[x]^2+[2x]=2209-93=2116\Rightarrow\times$

⑵$-46\leq x<-46+\frac{1}{2}=-\frac{91}{2}$の場合

$[x]^2+[2x]=2116-92=2024\Rightarrow\times$

⑶$-\frac{91}{2}\leq x<-45$の場合

$[x]^2+[2x]=2116-91=2025\Rightarrow\bigcirc$

⑷$-45\leq x<-2\sqrt{506}$の場合

$[x]^2+[2x]=2025-90=1935\Rightarrow\times$

以上より、求めるxの範囲は以下の通りです。

$$\frac{89}{2}\leq x<45, -\frac{91}{2}\leq x<-45$$

設問2　与式の平方根の中は、

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

なので、ガウス記号を外すと、

$$2025 \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} < 2026 \Rightarrow 2025^2 \leq \frac{n(n+1)}{2} < 2026^2$$

となって、

$$2025^2 \leq \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n \leq \frac{-\sqrt{32805001}-1}{2}, n \geq \frac{\sqrt{32805001}-1}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} < 2026^2 \Rightarrow \frac{-3\sqrt{3648601}-1}{2} < n < \frac{3\sqrt{3648601}-1}{2}$$

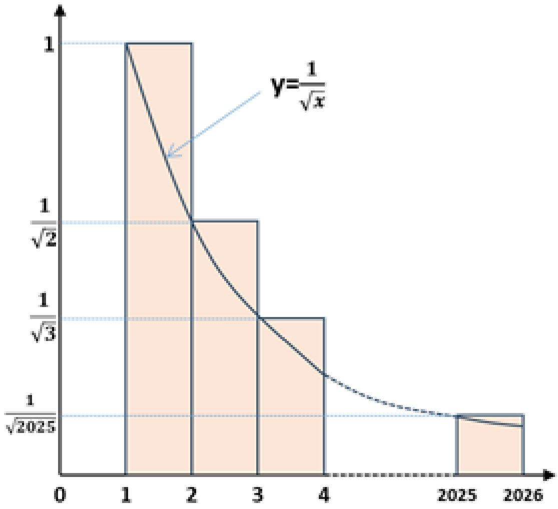
です。これらの条件をまとめると、

$$\frac{\sqrt{32805001}-1}{2} \leq n < \frac{3\sqrt{3648601}-1}{2} \Rightarrow 2863.2\cdots \leq n < 2864.6\cdots$$

となりますから、求める自然数は$n = 2864$です。

設問3

ガウス記号の中の数式をグラフで表現すると、右図の色付けした面積であることがわかります。

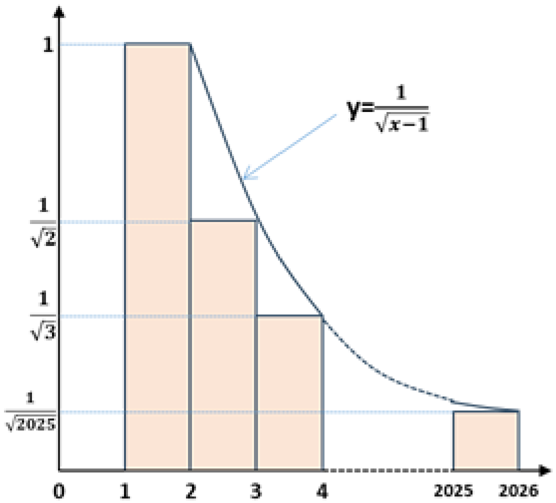


見ての通り、その面積は$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$を1から2026までの積分た値よりは大きいので、

$$\int_1^{2026}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2026}-2<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

です。また、$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$を2から2026まで積分した値+1 よりは小さいので、



$$\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_2^{2026}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx+1$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<89$$

です。

以上より

$$2\sqrt{2026}-2<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<89\Rightarrow 88.022\cdots<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<89$$

なので、これにガウス記号を適用すると、

$$\left[\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]=88$$

となります。

設問4 $\left[\sqrt{\mathrm{n}}\right] = \mathrm{m}$を満たす自然数nは次の区間に存在します。

$$\mathrm{m}^2 \leq \mathrm{n} < (\mathrm{m}+1)^2$$

この中で、$\left[\sqrt{\mathrm{n}}\right] = \mathrm{m}$で割り切れるnは、$\mathrm{m}^2, \mathrm{m}(\mathrm{m}+1), \mathrm{m}(\mathrm{m}+2)$の3 個です。

$1 \leq \mathrm{n} \leq 2024$の場合

$\left[\sqrt{\mathrm{n}}\right] = \mathrm{m}$となるmは1から44まであるので、約数の数は$44 \times 3 = 132$ 個です。

$\mathrm{n} = 2025$の場合

$\left[\sqrt{2025}\right] = 45$なので、約数の数は1 個です。

以上より、$\left[\sqrt{\mathrm{n}}\right]$がnの約数となるものは$132 + 1 = 133$ 個です。

追加問題1

他にもあると思いますが、見つけたものを記載します。

⑴ 括弧を使わないとき

$1 \times 2 + 345 \times 6 - 7 \times 8 + 9$

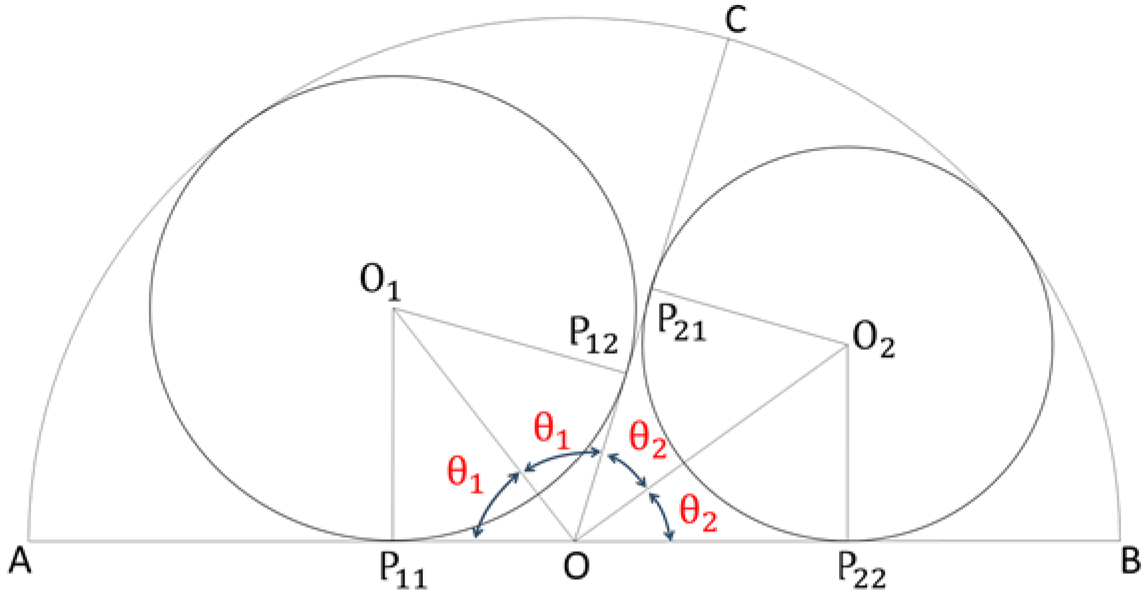
$12 - 3 + 4 \times 567 \times 8 \div 9$

⑵ 括弧を 1 組み使うとき

$(1 - 2 + 3 + 4 + 5 \times 6) \times 7 \times 8 + 9$

$12 \times (34 + 56 + 78) + 9$

追加問題2　下図のように、半円の中心をO、扇の頂点をA, B, C、各内接円の中心をO_1, O_2とします。そして、O_1, O_2から扇の辺に垂直に下した点を$P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$とします。



すると、図形の対称性から、

$$\angle O_1OP_{11} = \angle O_1OP_{12} = \theta_1$$
$$\angle O_2OP_{21} = \angle O_2OP_{22} = \theta_2$$

ですから、

$$2(\theta_1 + \theta_2) = \pi \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \Rightarrow \sin\theta_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \cos\theta_2$$

です。ここで、半円の半径をRとすると、

$$\sin\theta_1 = \frac{32}{R-32} \qquad \sin\theta_2 = \frac{27}{R-27}$$
$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{R^2-64R}}{R-32} \qquad \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{R^2-54R}}{R-27}$$

なので、

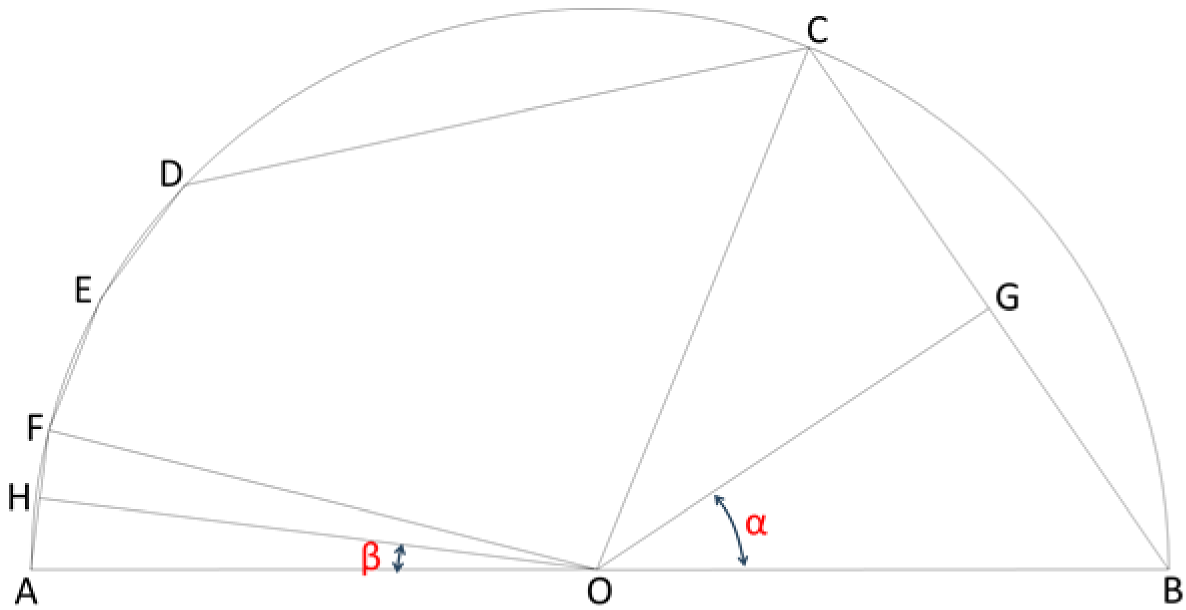
$$\frac{32}{R-32} = \frac{\sqrt{R^2-54R}}{R-27} \Rightarrow \left(\frac{32}{R-32}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{R^2-54R}}{R-27}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(R-72)(R^3-46R^2+144R+10368)}{(R-32)^2(R-27)^2} = 0 \Rightarrow R = 72$$

となります。なお、補足1に記載した通り、$R \geq 0$のとき$R^3 - 46R^2 + 144R + 10368$ の解は存在しません。

以上より、求める半径は72です。

追加問題3　下図のように、半円の中心Oから線分BC, AFに垂直に下した点をそれぞれG, Hとします。



$\angle BOG = \alpha, \angle AOH = \beta$とすると、

$$4\alpha + 6\beta = \pi \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 3\beta \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\beta\right) = \cos 3\beta$$

$$\Rightarrow 3\cos\beta\sin^2\beta - \cos^3\beta + 2\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

です。ここで、半円の半径をRとすると、

$$\sin\alpha = \frac{9}{2R} \qquad \sin\beta = \frac{1}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{4R^2 - 81}}{2R} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}$$

なので、

$$\text{上式} = 3\frac{\sqrt{R^2-1}}{R}\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{R^2-1}}{R}\right)^3 + 2\frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R}\frac{9}{2R} = 0$$

$\Rightarrow R = 8$　(計算過程は汚いので、補足2に記載)

$\Rightarrow AB = 2R = 2 \times 8 = 16$

以上より、$AB = 16$です。

補足1 $\mathbf{R^3 - 46R^2 + 144R + 10368}$、$\mathbf{R \geq 0}$のときの解について

上式を

$$f(R) = R^3 - 46R^2 + 144R + 10368$$

とすると、

$$f(R)' = 3R^2 - 92R + 144$$

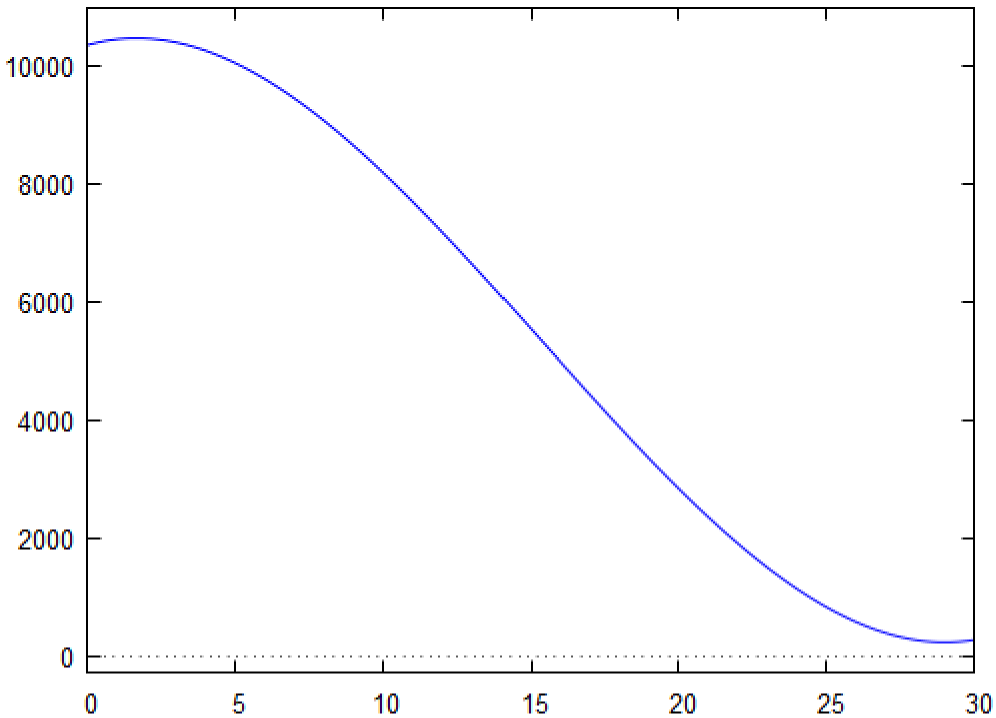
なので、

$$f(R)' = 0 \Rightarrow R = \frac{46 - 2\sqrt{421}}{3}, \frac{46 + 2\sqrt{421}}{3}$$

です。

増減表を作ると、以下のようになります

R	0	…	$\frac{46 - 2\sqrt{421}}{3}$	…	$\frac{46 + 2\sqrt{421}}{3}$	…
$f(R)'$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(R)$	10368	↗	$\frac{16(9055 + 421\sqrt{421})}{27}$	↘	$\frac{16(9055 - 421\sqrt{421})}{27}$	↗



よって、$R \geq 0$のとき解は存在しません。

補足２ $\mathbf{3\frac{\sqrt{R^2-1}}{R}\left(\frac{1}{R}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{R^2-1}}{R}\right)^3+2\frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R}\frac{9}{2R}=0}$の解について

$$3\frac{\sqrt{R^2-1}}{R}\left(\frac{1}{R}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{R^2-1}}{R}\right)^3+2\frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R}\frac{9}{2R}=0$$

$$\Rightarrow 9R^3\sqrt{4R^2-81}+\sqrt{R^2-1}(8R^2-2R^4)=0$$

$$\Rightarrow \left\{9R^3\sqrt{4R^2-81}\right\}^2-\left\{\sqrt{R^2-1}(8R^2-2R^4)\right\}^2=0$$

$$\Rightarrow (R-8)R^4(R+8)(2R^2-10R-1)(2R^2+10R-1)=0$$

$$\Rightarrow R=0,\pm 8,\frac{3\sqrt{3}\pm 5}{2},\frac{-5\pm 3\sqrt{3}}{2}$$

ここで、

$$4\alpha+6\beta=\pi\Rightarrow 4\alpha<\pi\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{4}$$

なので、

$$\sin\alpha=\frac{9}{2R}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{4}>\frac{9}{2R}\Rightarrow R>\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

でなければなりません。これを満足するのは、$R=8$です。