450 解答　よふかしのつらいおじさん

設問 1

$[[x]^2+2x]=2025$

$x=[x]+\alpha,\ 0\leq\alpha<1$ とします。

これをもとの式に入れると、

$[[x]^2+2x]=2025 \ \rightarrow\ \left[\underline{[x]^2+2[x]}+2\alpha\right]=2025 \ \rightarrow\ [x]^2+2[x]+[2\alpha]=2025$

下線部は、整数なのでガウス記号を外せます。

ここで、$0\leq\alpha<1 \ \rightarrow\ 0\leq 2\alpha<2$ なので、$[2\alpha]$ は 0 か 1 です。

・$[2\alpha]=0$ つまり、$0\leq\alpha<\frac{1}{2}$ のとき、

$[x]^2+2[x]+[2\alpha]=2025 \ \rightarrow\ [x]^2+2[x]=2025 \ \rightarrow\ [x]^2+2[x]-2025=0$

$\rightarrow\ [x]=-1\pm\sqrt{1+2025}=-1\pm\sqrt{2026}\left(=\begin{cases}44.01\cdots\\-46.01\cdots\end{cases}\right)$

$[x]$ は整数なので、適する解はありません。

・$[2\alpha]=1$ つまり、$\frac{1}{2}\leq\alpha<1$ のとき、

$[x]^2+2[x]+[2\alpha]=2025 \ \rightarrow\ [x]^2+2[x]+1=2025$

$\rightarrow\ [x]^2+2[x]-2024=0 \ \rightarrow\ ([x]-44)([x]+46)=0 \ \rightarrow\ [x]=44,-46$

よって、

$[x]=44$ のとき、$\frac{1}{2}\leq\alpha<1 \ \rightarrow\ [x]+\frac{1}{2}\leq[x]+\alpha<[x]+1 \ \rightarrow$

$44+\dfrac{1}{2}\leq x<44+1 \ \rightarrow\ 44.5\leq x<45$

$[x]=-46$ のとき、$\frac{1}{2}\leq\alpha<1 \ \rightarrow\ [x]+\frac{1}{2}\leq[x]+\alpha<[x]+1 \ \rightarrow$

$-46+\dfrac{1}{2}\leq x<-46+1 \ \rightarrow\ -45.5\leq x<-45$

設問 2

$$\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}\right]=\left[\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}\right]=2025 \ \rightarrow\ 2025\leq\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}<2026$$

$$\rightarrow\ 4100625\leq\frac{1}{2}n(n+1)<4104676 \ \rightarrow\ 8201250\leq n(n+1)<8209352$$

不等式の前半は、

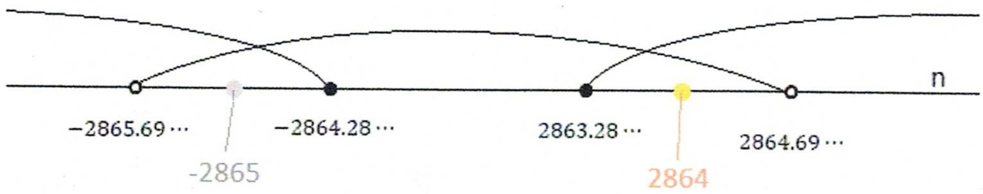
$8201250\leq n(n+1) \ \rightarrow\ n^2+n-8201250\geq 0$

$$\rightarrow\ n\leq\frac{-1-\sqrt{32805001}}{2}(=-2864.28\cdots),\ n\geq\frac{-1+\sqrt{32805001}}{2}(=2863.28\cdots)$$

不等式の後半は、

$$n(n+1) < 8209352 \quad \rightarrow \quad n^2 + n - 8209352 < 0$$
$$\rightarrow \quad \frac{-1-\sqrt{32837409}}{2} (= -2865.69\cdots) < n < \frac{-1+\sqrt{32837409}}{2} (= 2864.69\cdots)$$

まとめると、



n は自然数なので、n＝2864 です。

設問 3

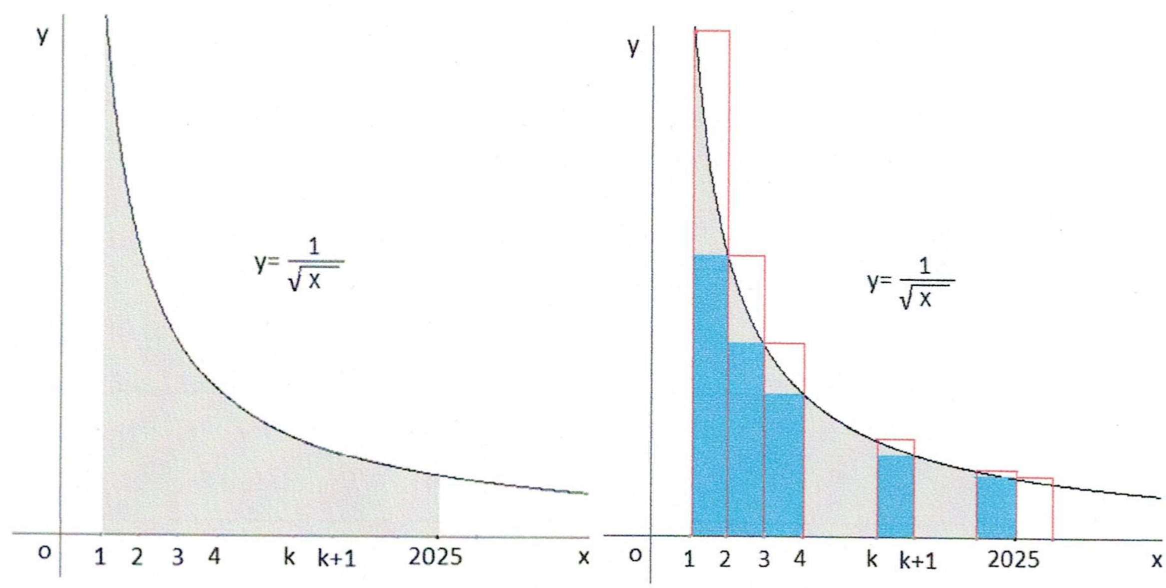
$\left[\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{k}}\right]$ を考えるのに、$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ を用います。

(グラフの縦横の比率は適当です)

このグラフの灰色部分の面積 S は、

$$S = \int_1^{2025} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\left[x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{2025} = 2\left(\sqrt{2025} - 1\right) = 88$$

これを基準にします。



x が整数のところで、グラフを縦に切っていきます。

x が k 、 k＋1 のところでみると、

青の長方形、灰色の部分、赤枠の順に面積は大きくなります。

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\times 1<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\frac{1}{\sqrt{k}}\times 1$$

青の長方形を全部集めると、

$$\frac{1}{\sqrt{1+1}}\times 1+\frac{1}{\sqrt{2+1}}\times 1+\frac{1}{\sqrt{3+1}}\times 1+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024+1}}\times 1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2025}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{1}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2025}}\underline{-\frac{1}{\sqrt{1}}}=\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}-1$$

灰色の部分を全部集めると、88 です。

赤枠の部分は、

$$\frac{1}{\sqrt{1}}\times 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}}\times 1=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}}+\underline{\frac{1}{\sqrt{2025}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{45}$$

まとめると、

$$\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}-1<88<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{45}$$

前半は、

$$\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}-1<88 \ \rightarrow\ \sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<89$$

後半は、

$$88<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{45} \ \rightarrow\ 88\frac{1}{45}<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

よって、

$$88\frac{1}{45}<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<89 \ \rightarrow\ \left[\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<89\right]=88$$

設問 4

$[\sqrt{n}]=k$ とおくと、

$k\leq\sqrt{n}<k+1 \ \rightarrow\ k^2\leq n<(k+1)^2=k^2+2k+1$

この範囲でkを因数に持つ整数は、$k^2,\ k(k+1),\ k(k+2)$

具体的に書くと、

$k=1$ のとき、n は、$1^2=1, 1\times2=2, 1\times3=3$

$k=2$ のとき、n は、$2^2=4, 2\times3=6, 2\times4=8$

$k=3$ のとき、n は、$3^2=9, 3\times4=12, 3\times5=15$

…

$k=44$ のとき、n は、$44^2=1936, 44\times45=1980, 44\times46=2024$

$k=45$ のとき、n は、$45^2=2025, 45\times46=2070, 45\times47=2115$

よって、

個数は、$44\times3+1=133$

追加

問題1

(1)

かっこを使わないので、2000程度の数をつくり、調整することを考えると、

$1\times2+345\times6-7\times8+9$

(2)

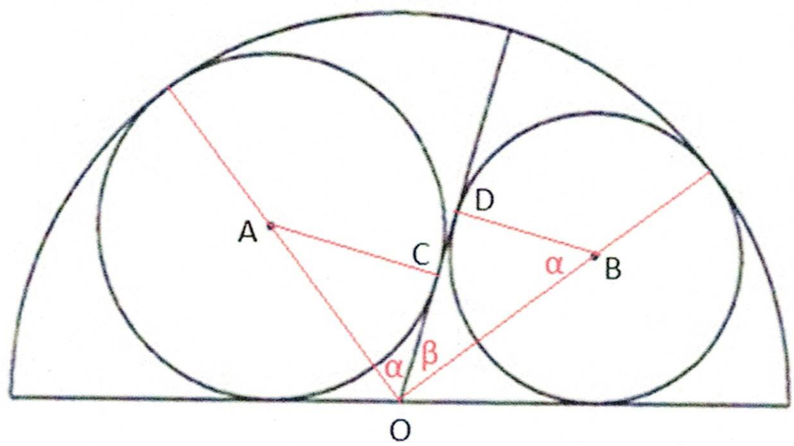
2025＝225×9を考えて、

$(1+234-5-6-7+8)\times9$

問題2

半円の半径をrとし、図のように∠AOC＝α、∠BOD＝βとします。

$2\alpha+2\beta=180°\ \ \rightarrow\ \ \alpha+\beta=90°$ です。



△OAC と△OBD で、

$$\sin\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{32}{r-32}, \quad \sin\beta = \cos\alpha = \frac{OD}{OB} = \frac{27}{r-27}$$

よって、

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{32}{r-32}\right)^2 + \left(\frac{27}{r-27}\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow \quad 32^2(r-27)^2 + 27^2(r-32)^2 = (r-32)^2(r-27)^2$$

$$\rightarrow \quad r^4 - 118r^3 + 3456r^2 - 746496 = 0$$

ここで、

$f(r) = r^4 - 118r^3 + 3456r^2 - 746496$ とします。

$f'(r) = 4r^3 - 354r^2 + 6912r = 2r(2r^2 - 177r + 3456) = 0$ として、

$$\rightarrow \quad r = 0, \frac{177 \pm \sqrt{3681}}{4}$$

増減表を作ると、

r	$\cdots\cdot$	0	$\cdots$	$\frac{177-\sqrt{3681}}{4}$	$\cdots$	$\frac{177+\sqrt{3681}}{4}$	$\cdots\cdot$
$f'(r)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(r)$	↘	-746496	↗	-10609.08・・・	↘	-834141.60・・・	↗

r は正なので、$\frac{177 \pm \sqrt{3681}}{4} = 59.41\cdots$ より大きな値が求める半径になります。

当たりをつけて具体的に計算すると、

r	71	72	73
$f(r)$	-146617	0	164763

r ＝72 が解となります。

念のため、

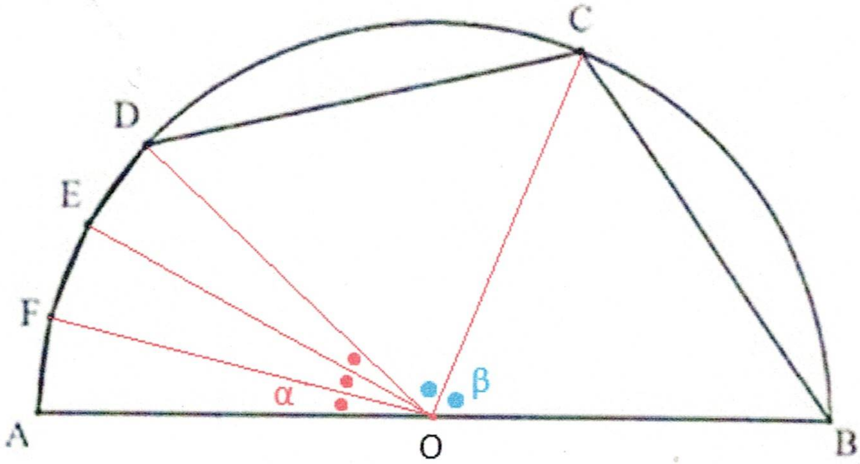
$r^4 - 118r^3 + 3456r^2 - 746496 = (r-72)(r^3 - 46r^2 + 144r + 10368)$

です。

問題 3

半円の半径を r とし、図のように∠AOF＝α、∠BOC＝β とします。

$$3\alpha + 2\beta = 180° \quad \rightarrow \quad \beta = 90° - \frac{3}{2}\alpha$$



△OAF と△OBC に余弦定理を用いると、

$$\begin{cases} 4 = 2r^2 - 2r^2\cos\alpha \\ 81 = 2r^2 - 2r^2\cos\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{r^2-2}{r^2} \quad \cdots \quad (1) \\ 2r^2\cos\beta = 2r^2 - 81 \quad \cdots \quad (2) \end{cases}$$

(1) より、

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{r^2-2}{r^2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}$$

また、

$$\cos\beta = \cos\left(90^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) = \sin\frac{3}{2}\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) = \sin\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha + \cos\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha$$

$$= \sin\alpha\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} + \cos\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}\sqrt{\frac{1+\frac{r^2-2}{r^2}}{2}} + \frac{r^2-2}{r^2}\sqrt{\frac{1-\frac{r^2-2}{r^2}}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{r^2-1}}{r^2}\sqrt{\frac{r^2-1}{r^2}} + \frac{r^2-2}{r^2}\sqrt{\frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r^3}\{2(r^2-1)+(r^2-2)\} = \frac{3r^2-4}{r^3}$$

これを(2)に入れると、

$$2r^2\cos\beta = 2r^2 - 81 \quad \rightarrow \quad 2r^2 \times \frac{3r^2-4}{r^3} = 2r^2 - 81 \quad \rightarrow \quad 2r^3 - 6r^2 - 81r + 8 = 0$$

$$\rightarrow \quad (r-8)(2r^2+10r-1) = 0 \quad \rightarrow \quad r = 8,\ \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}(0.0980\cdots),\ \frac{-5-3\sqrt{3}}{2}(-5.0980\cdots)$$

r は正で適するのは 8 です。

よって、A B は、16 です。