● 問題 450 解答＜三角定規＞

[設問１]　$[[x]^2+2x]=2025$ …①

①より，　$2025\leqq[x]^2+2x<2026$ …②

nを整数として，$n\leqq x<n+1$ のとき，$[x]=n$，$[x]^2=n^2$ だから　$2025\leqq n^2+2x<2026$ …③

③及び $-2(n+1)<-2x\leqq-2n$ より，　$2023-2n<n^2<2026-2n$ …④

④を解いて，$43.9\cdots=-1+\sqrt{2023}<n<-1+\sqrt{2027}=44.2\cdots$　$\therefore\ n=44$ …⑤

⑤を③に戻して，　$2025\leqq 44^2+2x<2026$　$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{89}{2}\leqq x<90}$ …[答]

[設問２]　$\left[\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k}\right]=2025$ …① を満たす n

①より，$2025\leqq\sqrt{\dfrac{1}{2}n(n+1)}<2026$　$\therefore\ 2\cdot2025^2\leqq n(n+1)<2\cdot2026^2$

$\therefore\ n^2+n-2\cdot2025^2\geqq0,\ n^2+n-2\cdot2026^2<0$

この２式を解いて，$2863.2\cdots<n\leqq2864.6\cdots$

以上より，①を満たす n は，$n=\mathbf{2864}$ …[答]

[設問３]　$\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]$

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}$ とおくと，区分求積の考え方より，　$\displaystyle\int_0^{2025}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}<S<1+\int_1^{2025}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ …①

①の左評価式$=\left[2\sqrt{x+1}\,\right]_0^{2025}=2(\sqrt{2026}-1)=88.0\cdots$

①の右評価式$=1+\left[2\sqrt{x}\,\right]_1^{2025}=1+2(\sqrt{2025}-1)=89$

よって，$88.0\cdots<S<89$　$\therefore\ [S]=\mathbf{88}$ …[答]

（※ エクセルで計算すると, $S=88.55\cdots$ となるようです。）

[設問４]　以下，mを自然数として

(ⅰ) $n=m^2$ のとき，$\sqrt{n}=[\sqrt{n}\,]=m$ だから題意を満たす。

(ⅱ) $n=m^2-1=(m-1)(m+1)$ のとき，$\sqrt{n}=\sqrt{m^2-1}=m\sqrt{1-\dfrac{1}{m^2}}$ より　$[\sqrt{n}\,]=m-1$ で，題意を満たす。

(ⅲ) $(m-1)^2<n<m^2$ のとき，$n=(m-1)m$ は $\sqrt{n}=m\sqrt{1-\dfrac{1}{m}}$ より，$[\sqrt{n}\,]=m-1$ で題意を満たす。

題意を満たすのはこの３つの場合のみで, 2025 以下の自然数 n について,（ⅰ）を満たすものは $m=1\sim45$ の 45 個。（ⅱ）（ⅲ）を満たすものは $m=2\sim45$ の各 44 個, 計 88 個。

以上より, 求める n の個数は, **133** 個 …[答]

《追加問題》

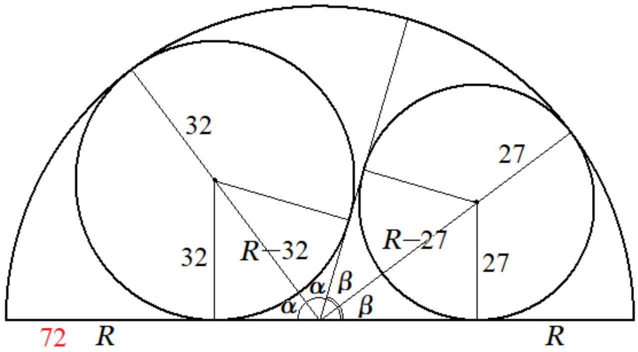
[問題１]（1）　$12 - 3 + 4 \times 567 \times 8 \div 9 = 2025$

$1 \times 2 + 345 \times 6 - 7 \times 8 + 9 = 2025$

※ 以前作ったエクセルのマクロで虱潰しをしました。
（　）には非対応なので，(1)のみ解答します。

[問題２]

半円の半径を R とし,図のように α, β を定める。



このとき，　$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$　…①

$\sin\alpha = \dfrac{32}{R-32}$，$\sin\beta = \dfrac{27}{R-27}$　…②

①②より，$1-\sin^2\alpha = \dfrac{R^2-64R}{(R-32)^2} = \cos^2\alpha$

$= \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin^2\beta = \dfrac{27^2}{(R-27)^2}$

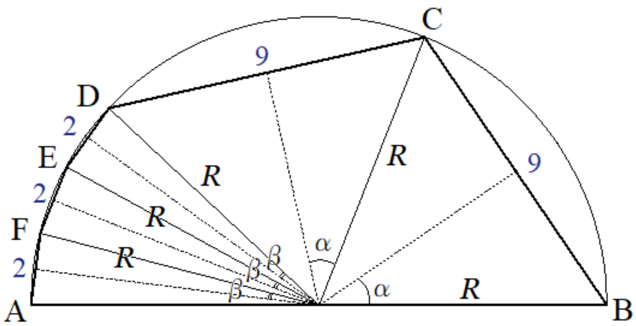
$\therefore\ (R^2-64R)(R-27)^2 = (R-32)^2 \cdot 27^2$

整理して，　$(R-72)(R^3-46R^2+144R+10368)=0$　…③

③より，$R=72$ は①②を満たす解のひとつだが，②より α, β はともに R について単調減少だから唯一の解である。以上より，求める半円の半径は **72**。　…[答]

[問題３]

右図のように，半円の半径を R，二等辺三角形の半頂角を α, β とすると，



$2\alpha + 3\beta = \dfrac{\pi}{2}$　…①

$\sin\alpha = \dfrac{9}{2R}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{R}$　…②

①より

$1-2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3\beta\right) = \sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$

②を代入して，　$1-2\cdot\left(\dfrac{9}{2R}\right)^2 = \dfrac{3}{R} - \dfrac{4}{R^3}$

整理して，　$2R^3-6R^2-81R+8=(R-8)(2R^2+10R-1)=0$

これを解いて，　$R=8,\ \dfrac{-5\pm 3\sqrt{3}}{2}$　を得るが，後ろの 2 解は明らかに不適。

以上より，$\mathrm{AB}=2R=$**16**　…[答]