第 451 回

次の設問に答えよ。

設問 1　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}[\sqrt{k}\,]$ を求めよ。

解答　$2025=45^2$ であるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}\,]$ を考える。

一般に i を自然数として，$i=\sqrt{i^2}<\sqrt{i^2+1}<\sqrt{i^2+2}<\cdots<\sqrt{(i+1)^2-1}<\sqrt{(i+1)^2}=i+1$ であるから，

$$\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1}[\sqrt{k}\,]=i+i+\cdots+i \quad (\leftarrow (i+1)^2-i^2=2i+1\text{ 個の和})$$

$$=i(2i+1)$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}\,]=\sum_{i=1}^{n-1}i(2i+1)+\left[\sqrt{n^2}\right]=2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n+n=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$$ であるから，

$n=45$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}[\sqrt{k}\,]=59775$　答

設問 2　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n^3}[\sqrt[3]{k}\,]$ を n で表せ。

解答

一般に i を自然数として，$i=\sqrt[3]{i^3}<\sqrt[3]{i^3+1}<\sqrt[3]{i^3+2}<\cdots<\sqrt[3]{(i+1)^3-1}<\sqrt[3]{(i+1)^3}=i+1$ であるから，

$$\sum_{k=i^3}^{(i+1)^3-1}[\sqrt{k}\,]=i+i+\cdots+i \quad (\leftarrow (i+1)^3-i^3=3i^2+3i+1\text{ 個の和})$$

$$=i(3i^2+3i+1)$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n^3}[\sqrt{k}\,]=\sum_{i=1}^{n-1}i(3i^2+3i+1)+\left[\sqrt{n^3}\right]=3\cdot\frac{1}{4}(n-1)^2n^2+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n+n$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(3n^2-5n+4)$$　答

設問3　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2025} 2^{[\sqrt{k}\,]}$ を $a\cdot 2^b+c$ の形で求めよ。

解答　$2025=45^2$ であるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} 2^{[\sqrt{k}\,]}$ を考える。

設問1と同様に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} 2^{[\sqrt{k}\,]}=\sum_{i=1}^{n-1}(2i+1)2^i+2^{[\sqrt{n^2}\,]}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(2i+1)2^i=S$とおく。

$S=3\cdot 2+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)2^{n-1}$　…①

①× 2 より，

$2S=\quad 3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-3)2^{n-1}+(2n-1)2^n$　…②

②−① より，

$-S=3\cdot 2+2\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+2\cdot 2^{n-1}-(2n-1)2^n=3\cdot 2+\dfrac{2\cdot 2^2(2^{n-2}-1)}{2-1}-(2n-1)2^n=(-2n+3)2^n-2$

$\therefore S=(2n-3)2^n+2$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} 2^{[\sqrt{k}\,]}=S+2^n=(2n-3)2^n+2+2^n=(n-1)2^{n+1}+2$

$n=45$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2025} 2^{[\sqrt{k}\,]}=(45-1)\cdot 2^{45+1}+2=11\cdot 2^{48}+2$　（$a\cdot 2^b+c$ の形）　答

参考　$11\cdot 2^{48}+2=3096224743817218$

設問4　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{n}{2}-1<\left[\dfrac{n}{2}\right]\leqq\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n}{3}-1<\left[\dfrac{n}{3}\right]\leqq\dfrac{n}{3}$ であるから，$\dfrac{5n}{6}-2<\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{3}\right]\leqq\dfrac{5n}{6}$

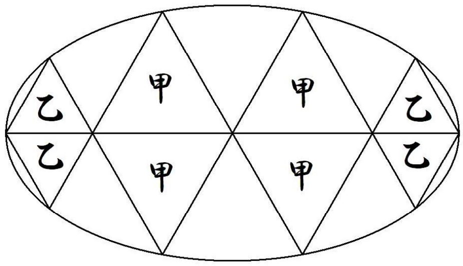
各々に $\dfrac{1}{n}$ を掛けると，$\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{n}<\dfrac{1}{n}\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{3}\right]\right)\leqq\dfrac{5}{6}$

$n\to\infty$ とすると，$\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{n}\to\dfrac{5}{6}$

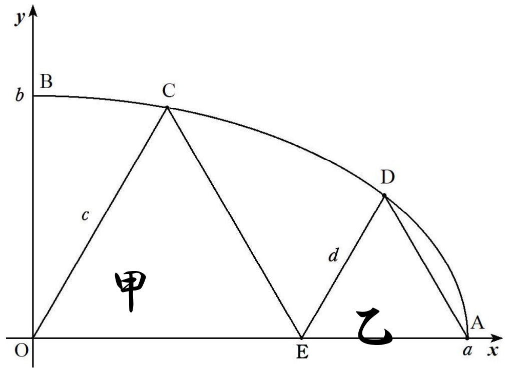
よって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)=\frac{5}{6}$　答

追加問題１

図のように楕円内に正三角甲乙を４個ずつ配置する。
甲の１辺が c のとき，乙の１辺を求めよ。
また，楕円の短軸を求めよ。



解答　楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…①とおく。



甲の１辺は c であるから，乙の１辺を d とする。
第１象限の部分に図のように記号を付ける。

このとき，$a=c+d$ で，$\mathrm{C}\left(\dfrac{c}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,c}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(c+\dfrac{d}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,d}{2}\right)$ は

①上の点であるから，

$$\frac{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}{(c+d)^2}+\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}\,c}{2}\right)^2}{b^2}=1 \quad \cdots②,\quad \frac{\left(c+\dfrac{d}{2}\right)^2}{(c+d)^2}+\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}\,d}{2}\right)^2}{b^2}=1 \quad \cdots③$$

②より，$b^2c^2+3c^2(c+d)^2=4b^2(c+d)^2$　$\therefore b^2=\dfrac{3c^2(c+d)^2}{4(c+d)^2-c^2}=\dfrac{3c^2(c+d)^2}{3c^2+8cd+4d^2}$　…②′

③より，$b^2(2c+d)^2+3d^2(c+d)^2=4b^2(c+d)^2$　$\therefore b^2=\dfrac{3d^2(c+d)^2}{4(c+d)^2-(2c+d)^2}=\dfrac{3d(c+d)^2}{4c+3d}$　…③′

②′，③′より，$\dfrac{3c^2(c+d)^2}{3c^2+8cd+4d^2}=\dfrac{3d(c+d)^2}{4c+3d}$

両辺を $3(c+d)^2>0$ で割って，整理すると，$c^2(4c+3d)=d(3c^2+8cd+4d^2)$

移項して因数分解すると，$(d+c)(d^2+cd-c^2)=0$

$d+c>0$ より，$d^2+cd-c^2=0$　$d=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}c$　$d>0$ より，$d=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}c$　…④

③′で，$b>0$ より，$b=(c+d)\sqrt{\dfrac{3d}{4c+3d}}$

これに④を代入すると，

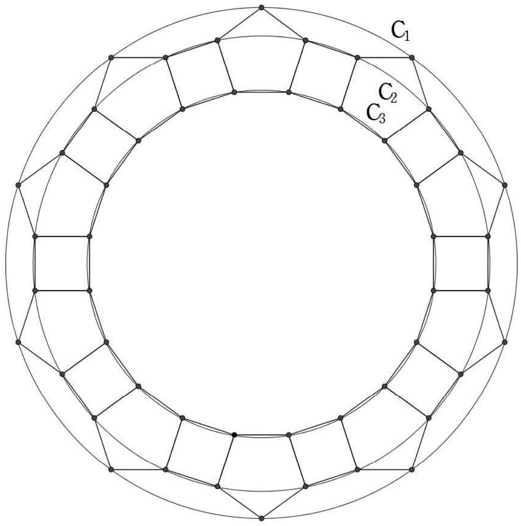
$$b=\left(c+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}c\right)\sqrt{\frac{3\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}c}{4c+3\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}c}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}c\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{3\sqrt{5}+5}}=\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{10}c$$

$$\therefore 2b=\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{5}c$$

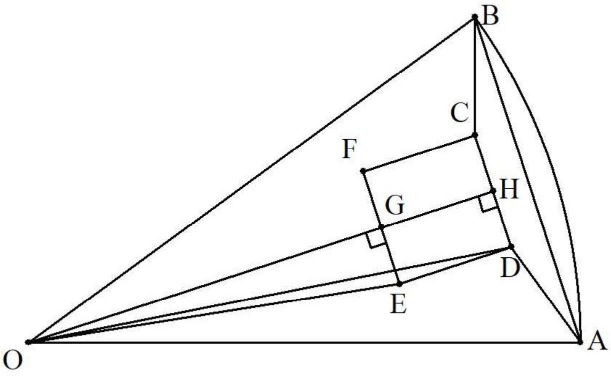
よって，　乙の１辺：$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}c$，楕円の短軸：$\dfrac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{5}c$　答

追加問題２

１辺の長さが１の正五角形と正方形が，図のように10個ずつ交互に連結している。10個の正五角形の頂点を通る円を C_1，C_2，C_3 とする。このとき，円 C_1，C_2，C_3 の半径をそれぞれ求めよ。



解答　C_1，C_2，C_3 の半径を r_1, r_2, r_3 とおき，図のように記号を付けると，



r_1 ＝OA＝OB, r_2 ＝OD＝OC, r_3 ＝OE＝OF である。

△OAB について，∠AOB＝ 36°，∠OAB＝ 72° である。

また，∠OAD＝ $\dfrac{108°}{2}$ ＝54° より，

∠DAB＝∠OAB－∠OAD＝ 72°－54° ＝ 18°

四角形 ABCD は等脚台形で，BC＝CD＝DA＝１，

∠CBA＝∠DAB＝ 18° であるから，AB＝１＋2cos18°

△OAB について，∠AOB＝ 36°，∠OAB＝ 72° であるから，

正弦定理により，$\dfrac{AB}{\sin 36°}=\dfrac{r_1}{\sin 72°}$　$\therefore r_1=2\,\mathrm{AB}\cos 36°=2(1+2\cos 18°)\cos 36°$

ここで，$\cos 36°=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ であるから（*），$\cos 18°=\sqrt{\dfrac{1+\cos 36°}{1}}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

よって，

$$r_1=2\left(1+2\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\quad(\fallingdotseq 4.69572)\quad\cdots①$$

（*）

$36°=\theta$ とおくと，$5\theta=180°$ より，$\sin 3\theta=\sin 2\theta$　$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$

両辺を $\sin\theta$ （≠０）で割ると，$3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta$，$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$\cos\theta>0$ より，$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　$\therefore \cos 36°=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

次に，

△OAD について，∠OAD＝ 54°，OA＝ r_1，AD＝１，DO＝ r_2 であるから，

余弦定理により，$r_2{}^2=1^2+r_1{}^2-2\cdot 1\cdot r_1\cos 54°$

これに①と$\cos 54°=\sin 36°=\sqrt{1-\cos^2 36°}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ を代入すると，

$r_2{}^2=1+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\dfrac{10+4\sqrt{5}+\sqrt{2(65+29\sqrt{5})}}{2}$

$r_2>0$ より，$r_2=\sqrt{\dfrac{10+4\sqrt{5}+\sqrt{2(65+29\sqrt{5})}}{2}}$ （≒ 4.18684） …②

最後に，$\angle\mathrm{EOG}=\theta_3$，$\angle\mathrm{DOH}=\theta_2$ とおくと，$\angle\mathrm{EOD}=\theta_3-\theta_2$ である。

$\triangle\mathrm{EOG}$，$\triangle\mathrm{DOH}$ は直角三角形であるから，$\sin\theta_3=\dfrac{1}{2r_3}$，$\sin\theta_2=\dfrac{1}{2r_2}$ …③

$\triangle\mathrm{EOD}$ に余弦定理を適用して，$\cos(\theta_3-\theta_2)=\dfrac{r_3{}^2+r_2{}^2-1^2}{2r_3r_2}$ …④

加法定理により，$\cos(\theta_3-\theta_2)=\cos\theta_3\cos\theta_2+\sin\theta_3\sin\theta_2$

移項して，両辺を2乗すると，$\{\cos(\theta_3-\theta_2)-\sin\theta_3\sin\theta_2\}^2=(1-\sin^2\theta_3)(1-\sin^2\theta_2)$

$\therefore \sin^2\theta_3+\sin^2\theta_2+\cos^2(\theta_3-\theta_2)-2\sin\theta_3\sin\theta_2\cos(\theta_3-\theta_2)-1=0$

③，④を代入すると，$\left(\dfrac{1}{2r_3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2r_2}\right)^2+\left(\dfrac{r_3{}^2+r_2{}^2-1}{2r_3r_2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2r_3}\cdot\dfrac{1}{2r_2}\cdot\dfrac{r_3{}^2+r_2{}^2-1^2}{2r_3r_2}-1=0$

分母を払い，r_3 について整理すると，$r_3{}^4-2(r_2{}^2+1)r_3{}^2+r_2{}^4-2r_2{}^2+2=0$

$r_3{}^2=r_2{}^2+1\pm\sqrt{4r_2{}^2-1}$　　$r_3{}^2-r_2{}^2=1\pm\sqrt{4r_2{}^2-1}<0$ より，$r_3{}^2=r_2{}^2+1-\sqrt{4r_2{}^2-1}$

②を代入すると，

$$r_3{}^2=\frac{10+4\sqrt{5}+\sqrt{2(65+29\sqrt{5})}}{2}+1-\sqrt{4\cdot\frac{10+4\sqrt{5}+\sqrt{2(65+29\sqrt{5})}}{2}-1}$$

$$=\frac{10+4\sqrt{5}+\sqrt{2(65+29\sqrt{5})}}{2}+1-\left(3+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)=\frac{6+2\sqrt{5}+\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{2}$$

$r_3>0$ より，$r_3=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}+\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{2}}$ （≒ 3.19623）

よって，円 C_1，C_2，C_3 の半径は，

C_1：$\dfrac{1+\sqrt{5}+2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$，$\mathrm{C}_2$：$\sqrt{\dfrac{10+4\sqrt{5}+\sqrt{2(65+29\sqrt{5})}}{2}}$，$\mathrm{C}_3$：$\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}+\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{2}}$ 答

（2025/2/2　ジョーカー）