設問1 $\left[\sqrt{k}\right] = m$として、ガウス記号を外すと、

$m^2 \leq k < (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m$

となりますが、これを満たすkの個数は、$m^2 + 2m - m^2 + 1 = 2m + 1$なので、この区間の和は$m(2m+1) = 2m^2 + m$です。$m = 1$～45の場合を表に整理すると、次のようになります。

$\mathbf{m}$	$\mathbf{m^2}$	$\mathbf{m^2 + 2m}$	$\mathbf{2m + 1}$	$\mathbf{2m^2 + m}$
1	1	3	3	3
2	4	8	5	10
3	9	15	7	21
…				
44	1936	2024	89	3916
45	2025			

よって、

$$与式 = \sum_{k=1}^{45^2}\left[\sqrt{k}\right] = \sum_{m=1}^{44}(2m^2 + m) + 45 = 59775$$

です。

設問2 前問と同様に考えて、$\left[\sqrt[3]{k}\right] = m$として、ガウス記号を外すと、

$m^3 \leq k < (m+1)^3 - 1 = m^3 + 3m^2 + 3m$

となりますが、これを満たすkの個数は、$m^3 + 3m^2 + 3m - m^3 + 1 = 3m^2 + 3m + 1$なので、この区間の和は$m(3m^2 + 3m + 1) = 3m^3 + 3m^2 + m$です。よって、

$$与式 = \sum_{k=1}^{n^3}\left[\sqrt[3]{k}\right] = \sum_{m=1}^{n-1}(3m^3 + 3m^2 + m) + n = \frac{n(n+1)(3n^2 - 5n + 4)}{4}$$

です。

設問3　設問1で作った表に2^mを追加すると、

$\mathbf{m}$	$\mathbf{m^2}$	$\mathbf{m^2+2m}$	$\mathbf{2m+1}$	$\mathbf{2^m}$
1	1	3	3	$3\cdot 2^1$
2	4	8	5	$5\cdot 2^2$
3	9	15	7	$7\cdot 2^3$
		…		
44	1936	2024	89	$89\cdot 2^{44}$
45	2025			2^{45}

となりますから、

$$\sum_{k=1}^{45^2} 2^{[\sqrt{k}]} = \sum_{m=1}^{44}(2m+1)2^m + 2^{45} = 2\sum_{m=1}^{44} m2^m + \sum_{m=1}^{44} 2^m + 2^{45}$$

ここで、補足1より、

$$\sum_{m=1}^{44} m2^m = \frac{2(44\cdot 2^{44+1} - 44\cdot 2^{44} - 2^{44} + 1)}{(2-1)^2} = 43\cdot 2^{45} + 2$$

なので、

$$\text{与式} = 2(43\cdot 2^{45} + 2) + 2\cdot\frac{2^{44}-1}{2-1} + 2^{45} = 11\cdot 2^{48} + 2$$

です。ここで、11と2は互いに素なので、求める値は、$a=11$、$b=48$、$c=2$となります。

設問4　与式を不等式で表現して、挟み撃ちにします。

$$\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3} < \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{3} \Rightarrow \frac{5n}{6} - 2 < \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \leq \frac{5n}{6}$$

上式をnで割ると、

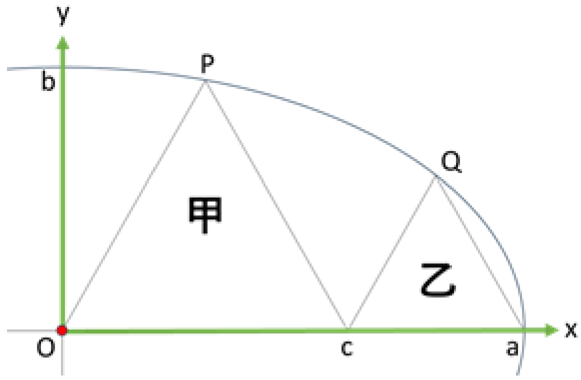
$$\frac{5}{6} - \frac{2}{n} < \frac{\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right]}{n} \leq \frac{5}{6}$$

です。$n\to\infty$とすると、左辺・右辺は$\frac{5}{6}$に近づきますから、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right]}{n} = \frac{5}{6}$$

となります。

追加問題1 2025/02/25 赤字の箇所を修正



楕円の長軸2a、短軸2bとして、左図のように座標系を導入します。すると、甲は一辺がcの正三角形なので、点Pの座標は、

$$P=\left(\frac{1}{2}c,\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$$

また、乙は一辺が$a-c$の正三角形なので、点Qの座標は、

$$Q=\left(\frac{1}{2}(a+c),\frac{\sqrt{3}}{2}(a-c)\right)$$

です。

点P、Qは楕円上にあるので、

$$\left(\frac{\frac{1}{2}c}{a}\right)^2+\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{b}\right)^2=1\Rightarrow\frac{3a^2c^2+b^2c^2}{4a^2b^2}=1\cdots①$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(a+c)}{a}\right)^2+\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-c)}{b}\right)^2=1\Rightarrow\frac{3a^4-6ca^3+b^2a^2+3c^2a^2+2cb^2a+c^2b^2}{4a^2b^2}=1\cdots②$$

です。これらより、b^2を消去すると、

$$a^3-2a^2c+c^3=0$$

となります。これを解くと、

$$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}c,c$$

となりますが、$a>c$なので、

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}c$$

が適切です。これを①に代入して、

$$\frac{3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}c\right)^2c^2+b^2c^2}{4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}c\right)^2b^2}=1\Rightarrow b^2=\frac{3(5-\sqrt{5})c^2}{10}\Rightarrow b=\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{10}c$$

となります。

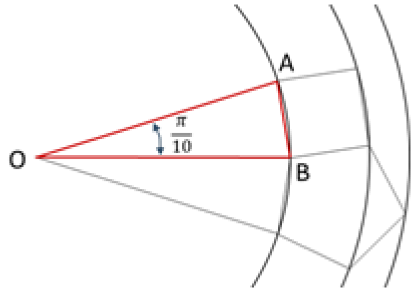
以上より、

$$乙の1辺の長さ = \mathrm{a} - \mathrm{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{c} - \mathrm{c} = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{c}} = 0.6180\cdots c$$

$$楕円の短軸 = 2\mathrm{b} = 2\cdot\frac{\sqrt{30\left(5-\sqrt{5}\right)}}{10}\mathrm{c} = \frac{\sqrt{30\left(5-\sqrt{5}\right)}}{5}\mathrm{c} = 1.8211\cdots c$$

です。

追加問題2



左図に示したように、C_3の半径をr_3として、円周上の点A、Bと中心Oで作られる⊿OABに着目すると、

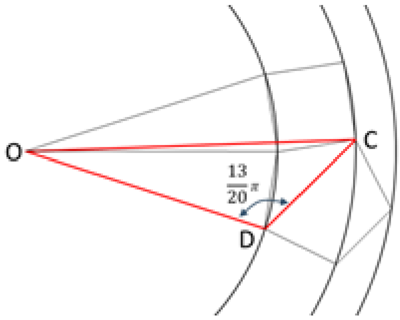
$$AB = 2OA\sin\frac{\pi}{20} \Rightarrow OA = \frac{AB}{2\sin\frac{\pi}{20}} \Rightarrow r_3 = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{20}}$$

です。

$\sin\frac{\pi}{20}$の値は補足2の通りなので、

$$r_3 = \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{5}+5}+\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{4} = 3.1962\cdots$$

です。



左図に示したように、C_2の半径をr_2として、円周上の点C、C_3の円周上の点Dと中心Oからなる⊿OCDに余弦定理を適用すると、

$$\frac{CD^2+OD^2-OC^2}{2\cdot CD\cdot OD} = \cos\frac{13}{20}\pi$$

$$\Rightarrow \frac{1^2+{r_3}^2-{r_2}^2}{2\cdot 1\cdot r_3} = -\sin\frac{3}{20}\pi$$

です。

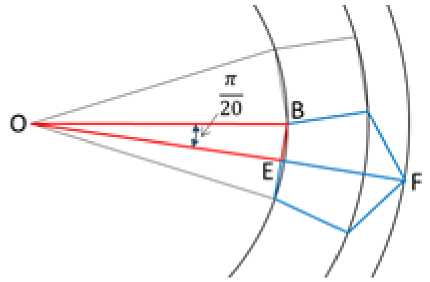
r_3は上の結果を用いて、$\sin\frac{3}{20}\pi$の値は補足4の通りなので、

$$\frac{1^2+\left(\frac{2\sqrt{\sqrt{5}+5}+\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{4}\right)^2-{r_2}^2}{2\cdot 1\cdot\frac{2\sqrt{\sqrt{5}+5}+\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{4}} = -\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}$$

$$\Rightarrow {r_2}^2 = \frac{\sqrt{2\left(29\sqrt{5}+65\right)}}{2}+2\sqrt{5}+5$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2\left(29\sqrt{5}+65\right)}+4\left(2\sqrt{5}+5\right)}}{2} = 4.1868\cdots$$

となります。



左図に示したように、C_1の半径をr_1とすると、

$$r_1 = OE + EF$$

です。

すると

$$OE = r_3 \cos\frac{\pi}{20}$$

ここで、r_3は前ページの結果を用いて、$\cos\frac{\pi}{20}$は補足2の通りなので、

$$OE = \frac{2\sqrt{\sqrt{5}+5}+\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{4}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{2}$$

となります。また、EFは正五角形の高さなので、補足5より

$$EF = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$$

です。よって、

$$r_1 = OE + EF = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{2} = 4.6957\cdots$$

となります。

以上より、各円の半径は次の通りです。

$$C_1\text{の半径} = \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{2} = 4.6957\cdots$$

$$C_2\text{の半径} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2\left(29\sqrt{5}+65\right)}+4\left(2\sqrt{5}+5\right)}}{2} = 4.1868\cdots$$

$$C_3\text{の半径} = \frac{2\sqrt{\sqrt{5}+5}+\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{4} = 3.1962\cdots$$

補足１ $\sum_{k=1}^{n} kr^k$

$r \neq 1$とすると、

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = r\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

ですが、両辺をrで微分すると、

$$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{nr^{n+1} - nr^n - r^n + 1}{(r - 1)^2}$$

です。両辺にrを掛けて、

$$\sum_{k=1}^{n} kr^k = \frac{r(nr^{n+1} - nr^n - r^n + 1)}{(r - 1)^2}$$

となります。

補足２ $\sin\frac{\pi}{20}$、$\cos\frac{\pi}{20}$

$$\sin\frac{\pi}{20}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{5}$$

ここで、$\sin\frac{\pi}{5}$、$\cos\frac{\pi}{5}$の値は補足3の通りなので、

$$\text{上式}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$$

となります。また、

$$\cos\frac{\pi}{20}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$$

補足３ $\sin\frac{\pi}{5}$、$\cos\frac{\pi}{5}$

$\theta=\frac{\pi}{5}$とすると、$5\theta=\pi\Rightarrow 3\theta=\pi-2\theta$なので、

$$\sin 3\theta=\sin(\pi-2\theta)=\sin 2\theta\Rightarrow 3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow 3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

ここで、$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{5}>0$なので、

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

また、

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

となります。

補足4　$\sin\frac{3}{20}\pi$

$$\sin\frac{3}{20}\pi = 3\sin\frac{\pi}{20} - 4\sin^3\frac{\pi}{20}$$

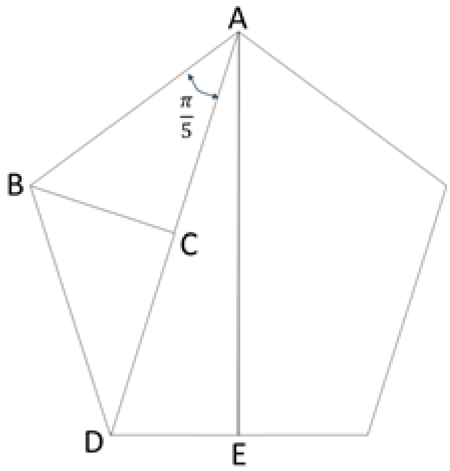
ここで、$\sin\frac{\pi}{20}$の値は補足2より得られるので、

$$\text{上式} = 3\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}\right)^3$$

$$= \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}$$

となります。

補足5　正五角形の高さ



左図のような一辺の長さが1の正五角形を考えます。すると、

$$\mathrm{AD} = 2\mathrm{AC} = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

$\cos\frac{\pi}{5}$の値は補足3で求めたので、

$$\mathrm{AD} = 2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

です。

次に、⊿ADEに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{AE}^2 + \mathrm{DE}^2 = \mathrm{AD}^2 \Rightarrow \mathrm{DE}^2 = \mathrm{AD}^2 - \mathrm{DE}^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{DE} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$$