451 解答　よふかしのつらいおじさん

設問 1

$$\sum_{k=1}^{2025}\left[\sqrt{k}\right]$$

$$=\left(\left[\sqrt{1}\right]+\cdots+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+\cdots+\left[\sqrt{8}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{9}\right]+\cdots+\left[\sqrt{15}\right]\right)+\cdots+\left(\left[\sqrt{44^2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{2024}\right]\right)+\left[\sqrt{2025}\right]$$

$$=1\times(3-1+1)+2\times(8-4+1)+3\times(15-9+1)+\cdots+44\times(2024-44^2+1)+\sqrt{2025}$$

$$=1\times 3+2\times 5+3\times 7+\cdots+44\times 89+45$$

$$=1\times(1\times 2+1)+2\times(2\times 2+1)+3\times(3\times 2+1)+\cdots+44\times(44\times 2+1)+45$$

$$=2\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+44^2)+1\times(1+2+3+\cdots+44)+45$$

$$=2\times\frac{44\times 45\times 89}{6}+\frac{44\times 45}{2}+45=44\times 45\times\left(\frac{89}{3}+\frac{1}{2}\right)+45=44\times 45\times\frac{178+3}{6}+45$$

$$=22\times 15\times 181+45=59775$$

設問 2

$$\sum_{k=1}^{n^3}\left[\sqrt[3]{k}\right]$$

$$=\left(\left[\sqrt[3]{1}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{7}\right]\right)+\left(\left[\sqrt[3]{8}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{26}\right]\right)+\left(\left[\sqrt[3]{27}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{63}\right]\right)+\cdots+\left(\left[\sqrt[3]{(n-1)^3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]\right)+\left[\sqrt[3]{n^3}\right]$$

$$=1\times(7-1+1)+2\times(26-8+1)+3\times(63-27+1)+\cdots+(n-1)\times\{n^3-1-(n-1)^3+1\}+n$$

$$=1\times 7+2\times 19+3\times 37+\cdots+(n-1)\times(3n^2-3n+1)+n$$

$$=1\times(7)+2\times(19)+3\times(37)+\cdots+(n-1)\times(3n^2-3n+1)+n$$

$$=1\times(7)+2\times(19)+3\times(37)+\cdots+(n-1)\times\{3(n-1)^2+3(n-1)+1\}+n$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}k(3k^2+3k+1)+n=\sum_{k=1}^{n-1}(3k^3+3k^2+k)+n$$

$$=3\times\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2+3\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+n$$

$$=n\left\{\frac{3(n-1)^2n}{4}+\frac{(n-1)(2n-1)}{2}+\frac{n-1}{2}+1\right\}$$

$=\frac{n}{4}\left\{3\,(n^3-2n^2+n)+2(2n^2-3n+1)+2(n-1)+4\right\}$

$=\frac{n}{4}(3n^3-2n^2-n+4)=\frac{n}{4}(n+1)(3n^2-5n+4)$

設問 3

●あらかじめ次の計算をしておきます。

$A=2^1\times3+2^2\times5+2^3\times7+\cdots+2^{44}\times89$

この式を 2 倍したものを 1 項ずらして引くと、

$$\begin{array}{rl} 1A= & 2^1\times3+2^2\times5+2^3\times7+\cdots\cdots\cdots\cdots+2^{44}\times89 \\ 2A= & \qquad\quad 2^2\times3+2^3\times5+2^4\times7+\ \cdots+2^{44}\times87+2^{45}\times89 \\ \hline -A= & 2^1\times3+2^2\times2+2^3\times2+2^4\times2+\ \cdots+2^{44}\times2-2^{45}\times89 \end{array}$$

よって、

$A=-2^1\times3-2\times(2^2+2^3+2^4+\ \cdots+2^{44})+2^{45}\times89$

$=-6-8\times(1+2+2^2+2^3+\ \cdots+2^{42})+2^{45}\times89=-6-8\times\frac{1-2^{43}}{1-2}+2^{45}\times89$

$=-6-8\times(2^{43}-1)+2^{45}\times89=89\times2^{45}-2\times2^{45}+8-6=87\times2^{45}+2$

●

$$\sum_{k=1}^{2025}2^{[\sqrt{k}]}$$

$=(2^{[\sqrt{1}]}+\cdots+2^{[\sqrt{3}]})+(2^{[\sqrt{4}]}+\cdots+2^{[\sqrt{8}]})+(2^{[\sqrt{9}]}+\cdots+2^{[\sqrt{15}]})+\cdots+(2^{[\sqrt{1936}]}+\cdots+2^{[\sqrt{2024}]})+2^{[\sqrt{2025}]}$

$=(2^1+\cdots+2^1)+(2^2+\cdots+2^2)+(2^3+\cdots+2^3)+\cdots+(2^{44}+\cdots+2^{44})+2^{45}$

$=\underline{2^1\times3+2^2\times5+2^3\times7+\cdots+2^{44}\times89}+2^{45}=87\times2^{45}+2+2^{45}=88\times2^{45}+2$

$=11\times2^{48}+2$

設問 4

$$\begin{cases}\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\le\frac{n}{2}\\ \frac{n}{3}-1<\left[\frac{n}{3}\right]\le\frac{n}{3}\end{cases}\rightarrow\ \left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{3}-1\right)<\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\le\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \left(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}-2\right)<\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\le\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}\right)\ \rightarrow\ \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}-2\right)<\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)\le\frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}\right)$$

$$\rightarrow\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{n}\right)<\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)\le\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\ \rightarrow\ \frac{5}{6}-\frac{2}{n}<\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)\le\frac{5}{6}$$

$n\to\infty$ のとき $\frac{2}{n}\to0$ より $\frac{5}{6}$ に挟まれ、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)=\frac{5}{6}$

追加問題

問題１

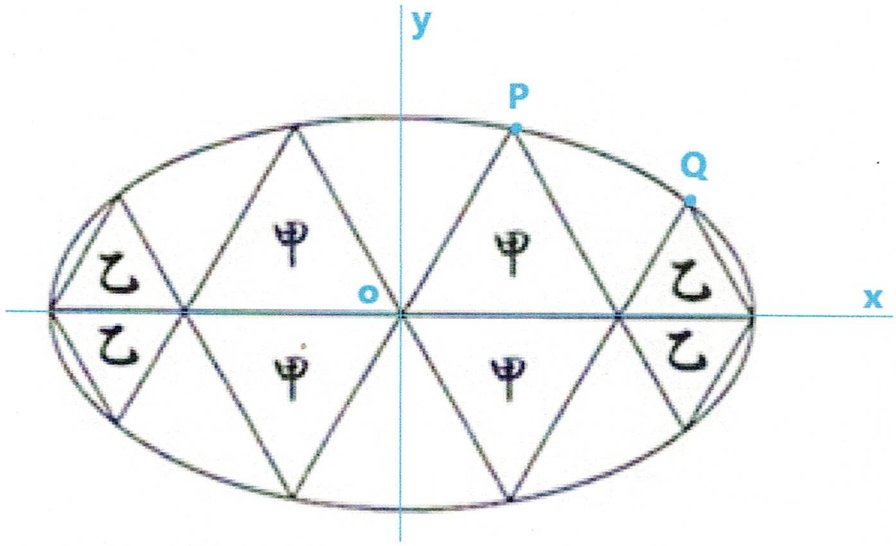
正三角形の１辺の長さを甲：ｃ、乙：ｄとし、楕円の短軸の長さを２ｂとすると、

楕円の方程式は、

$$\frac{x^2}{(c+d)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \rightarrow \quad b^2x^2+(c+d)^2y^2=b^2(c+d)^2$$

点Ｐ、Ｑの座標は、

$$P\left(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)、Q\left(c+\frac{d}{2},\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)$$



点Ｐ、Ｑの座標を方程式に入れると、

$$b^2\left(\frac{c}{2}\right)^2+(c+d)^2\left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2=b^2(c+d)^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3c^2}{4}+2cd+d^2\right)b^2=\frac{3c^2}{4}(c+d)^2 \quad \cdots \quad (ア)$$

$$b^2\left(c+\frac{d}{2}\right)^2+(c+d)^2\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)^2=b^2(c+d)^2 \quad \rightarrow \quad \left(cd+\frac{3d^2}{4}\right)b^2=\frac{3d^2}{4}(c+d)^2 \quad \cdots \quad (イ)$$

(ア)／(イ)より、

$$\frac{\frac{3c^2}{4}+2cd+d^2}{cd+\frac{3d^2}{4}}=\frac{c^2}{d^2} \quad \rightarrow \quad \frac{3c^2d^2}{4}+2cd^3+d^4=c^3d+\frac{3c^2d^2}{4} \quad \rightarrow \quad d^4+2cd^3-c^3d=0$$

$$\rightarrow \quad d(d^3+2cd^2-c^3)=0 \quad \rightarrow \quad d(d+c)(d^2+cd-c^2)=0 \quad \rightarrow \quad d=0,-c,\frac{-c\pm\sqrt{5}c}{2}$$

$$\rightarrow \quad d=\frac{\sqrt{5}-1}{2}c \quad \rightarrow \quad 乙の１辺は、\frac{\sqrt{5}-1}{2}c$$

(イ)より、

$$\left(cd+\frac{3d^2}{4}\right)b^2=\frac{3d^2}{4}(c+d)^2 \quad \rightarrow \quad b^2=\frac{\frac{3d^2}{4}(c+d)^2}{cd+\frac{3d^2}{4}}=\frac{\frac{3d}{4}(c+d)^2}{c+\frac{3d}{4}}=\frac{3d(c+d)^2}{4c+3d}$$

$$=\frac{3\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}c\left(c+\frac{\sqrt{5}-1}{2}c\right)^2}{4c+3\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}c}$$

$$=\frac{3\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 c^2}{\frac{3\sqrt{5}+5}{2}}=3\times\frac{(\sqrt{5}+1)c^2}{3\sqrt{5}+5}\times\frac{3\sqrt{5}-5}{3\sqrt{5}-5}=\frac{15-3\sqrt{5}}{10}c^2$$

$$b=\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{10}c^2}=\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{10}c$$

よって、

短軸の長さは、$\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{5}c$

問題 2

● 9 度、18 度、36 度の三角比の値を使います。
あらかじめ調べておきます。

・36 度

$\alpha=36°$ とおくと、$5\alpha=180°$ です。
$\cos 3\alpha=-\cos 2\alpha \quad \rightarrow \quad 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=-(2\cos^2\alpha-1)$

$$\rightarrow \quad 4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha-3\cos\alpha-1=0 \quad \rightarrow \quad (\cos\alpha+1)(4\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1)=0$$

$$\rightarrow \quad \cos\alpha=-1,\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

よって、

$$\cos 36°=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \rightarrow \quad \sin 36°=\sqrt{1-\cos^2 36°}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

・18 度

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

・9 度

$$\cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 18^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\sin 9^\circ = \sqrt{1-\cos^2 9^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

●先ず C3 の円の半径を調べます。

△OAB に余弦定理を使います。

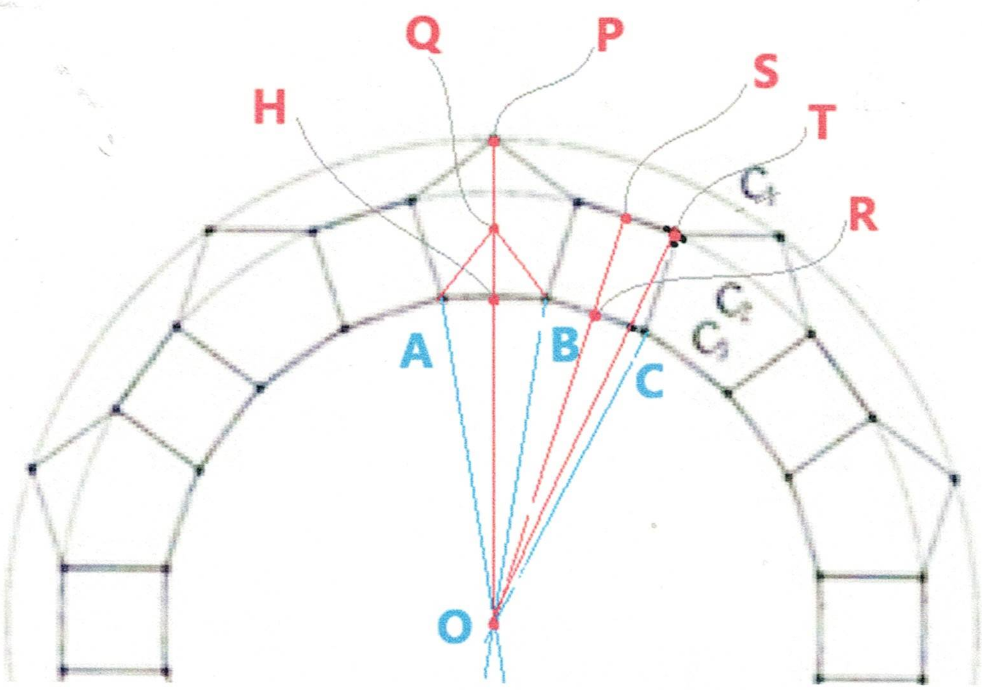
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cos\frac{360^\circ}{20} \quad\to\quad 1 = 2OA^2 - 2OA^2\cos 18^\circ \quad\to\quad OA^2 = \frac{1}{2(1-\cos 18^\circ)}$$

$$\to\quad OA^2 = \frac{1}{2\left(1-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)} = \frac{2}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\times\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{2\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{2(3-\sqrt{5})}\times\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{4} \quad\to\quad OA = \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}}{2}$$

よって、C3 の半径は、

$$\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}}{2}(=3.196226\cdots)$$



●次に C1 の半径を調べます。

△QAB について、

$$\angle AQB=\frac{360°}{5}=72°、\angle QAB=\frac{180°-72°}{2}=54° \quad\rightarrow\quad \cos\angle QAB=\frac{AH}{QA} \quad\rightarrow\quad \cos 54°=\frac{1}{2QA}$$

$$\rightarrow\ QA=\frac{1}{2\cos 54°}=\frac{1}{2\sin 36°}=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}}\times\frac{10+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}=\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{20}$$

・PQ=QA

・QH について、

$$QH=QA\sin 54°=QA\cos 36°=\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{20}\times\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{(5+3\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{40}$$

・OH について、

$$OH=OA\cos\angle AOH=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}}{2}\times\cos\frac{18°}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}}{2}\times\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}}{2}\times\frac{\sqrt{2\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}}{4}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}$$

以上から、C1 の半径は、

$$PQ+QH+HO=\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{20}+\frac{(5+3\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{40}+\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}$$

$$=\frac{(15+5\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{40}+\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\left(1+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}(=4.695717\cdots)$$

●最後に C2 の半径を調べます。
先ず、OS の長さは、

$$OS=OB+BS=OH+1=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}+1=\frac{8+\left(1+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}$$

次に、△OST に三平方の定理を使うと、

$$OT^2=OS^2+ST^2=\left\{\frac{8+\left(1+\sqrt{5}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}\right\}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10+4\sqrt{5}+\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

よって、

$$OT=\sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}+\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}=\frac{\sqrt{20+8\sqrt{5}+(4+2\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2}(=4.186838\cdots)$$