● 問題 451 解答＜三角定規＞

[設問１] $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}[\sqrt{k}\,]$

$n^2 \leqq k < (n+1)^2$ である $2n+1$ 個の k に対し，$n \leqq \sqrt{k} < n+1$ で $[\sqrt{k}\,]=n$。

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{2025}[\sqrt{k}\,]=\sum_{n=1}^{44}(2n+1)n+45=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+45$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)\Big|_{n=44}+45=\frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 181+45=\mathbf{59{,}775}\ \cdots[答]$$

[設問２] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n3}[\sqrt[3]{k}\,]$

$n^3 \leqq k < (n+1)^3$ である $3n^2+3n+1$ 個の k に対し，$n \leqq \sqrt[3]{k} < n+1$ で $[\sqrt[3]{k}\,]=n$。

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n3}[\sqrt[3]{k}\,]=\sum_{m=1}^{n-1}(3m^2+3m+1)m+n=\frac{3}{4}(n-1)^2n^2+\frac{1}{2}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n+n$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(3n^2-5n+4)}\quad\cdots[答]$$

[設問３] $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}2^{[\sqrt{k}\,]}$

$n^2 \leqq k < (n+1)^2$ である $2n+1$ 個の k に対し，$n \leqq \sqrt{k} < n+1$ で $[\sqrt{k}\,]=n$。

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{2025}2^{[\sqrt{k}\,]}=\sum_{n=1}^{44}(2n+1)2^n+2^{45}=2(2^{n+1}n-2^n+1)\Big|_{n=44}+2^{45}$$

$$=2^{46}\cdot 44-2^{45}+2+2^{45}=\mathbf{11\cdot 2^{48}+2}\ \cdots[答]$$

[設問４] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)=I$　と置く。m を自然数として，

(ⅰ) $n=6m$ のとき　$\displaystyle I=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{6m}([3m]+[2m])=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+2m}{6m}=\frac{5}{6}$

(ⅱ) $n=6m+1$ のとき　$\displaystyle I=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{6m+1}\left(\left[3m+\frac{1}{2}\right]+\left[2m+\frac{1}{3}\right]\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+2m}{6m+1}=\frac{5}{6}$

(ⅲ) $n=6m+2$ のとき　$\displaystyle I=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{6m+2}\left([3m+1]+\left[2m+\frac{2}{3}\right]\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+1+2m}{6m+2}=\frac{5}{6}$

(ⅳ) $n=6m+3$ のとき　$\displaystyle I=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{6m+3}\left(\left[3m+\frac{3}{2}\right]+[2m+1]\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+1+2m+1}{6m+3}=\frac{5}{6}$

(ⅴ) $n=6m+4$ のとき　$\displaystyle I=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{6m+4}\left([3m+2]+\left[2m+\frac{4}{3}\right]\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+2+2m+1}{6m+4}=\frac{5}{6}$

(ⅵ) $n=6m+5$ のとき　$\displaystyle I=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{6m+5}\left(\left[3m+\frac{5}{2}\right]+\left[2m+\frac{5}{3}\right]\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{3m+2+2m+1}{6m+5}=\frac{5}{6}$

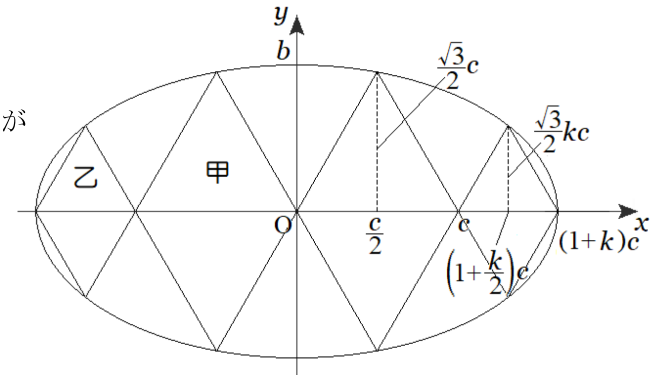
以上より，全ての場合について I は $\dfrac{5}{6}$ に収束するので，求める極限は $\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$ …[答]

《追加問題》

[問題１]

右図のように座標軸を定める。楕円の半短軸を b, 正三角形 乙の 1 辺を kc とする。このとき楕円の半長軸は $(1+k)c$ となるから, 楕円の方程式は,

$$\frac{x^2}{(1+k)^2c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots①$$



題意より，2 点 $\left(\frac{c}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$, $\left(\left(1+\frac{k}{2}\right)c,\ \frac{\sqrt{3}}{2}kc\right)$ がそれぞれ楕円①上にあるから，

$$\frac{1}{(1+k)^2c^2}\cdot\frac{c^2}{4}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{3}{4}c^2=1 \quad \cdots②$$

$$\frac{1}{(1+k)^2c^2}\cdot\left(1+\frac{k}{2}\right)^2c^2+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{3}{4}k^2c^2=1 \quad \cdots③$$

②より，$\frac{3c^2}{b^2}=4-\frac{1}{(1+k)^2}=\frac{4k^2+8k+3}{(k+1)^2} \quad \cdots④$

③④より，$\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}+k^2\cdot\frac{4k^2+8k+3}{(k+1)^2}=4$

整理して， $k^4+2k^3-k=k(k+1)(k^2+k-1)=0$

$k>0$ より，$k=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \cdots⑤$

⑤を④に戻し， $\frac{b^2}{c^2}=\frac{3(k+1)^2}{4(k+1)^2-1}=\frac{3(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{3(\sqrt{5}+1)^2}{4\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}=\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}$

$$\therefore\ b=\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{10}c$$

以上より， 乙 の 1 辺$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{2}c}$, 楕円の短軸$=2b=\boldsymbol{\frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{5}c}$ …[答]

[問題２] 次ページの図のように各点を定める。以下を既知とする。

$\angle\mathrm{AOG}=\frac{\pi}{20}$, $\angle\mathrm{FAG}=\angle\mathrm{EAF}=\frac{3\pi}{10}$

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

C_1, C_2, C_3 の半径を r_1, r_2, r_3 とする。

・r_3 について

図より $\sin\frac{\pi}{20}=\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{OA}}=\frac{1/2}{r_3}$ $\therefore\ r_3=\frac{1}{2\sin(\pi/20)}$

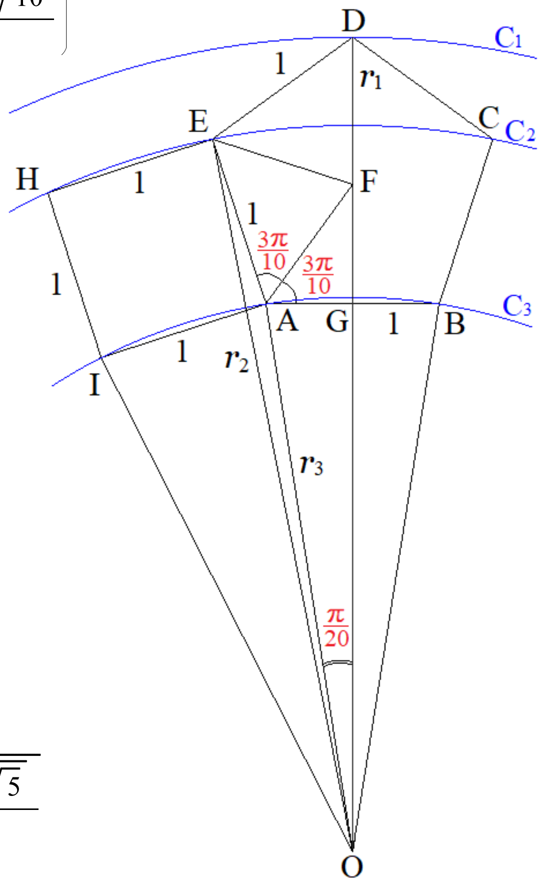
$$\sin^2\frac{\pi}{20}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{10}\right)=\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sin^2(\pi/20)}=\frac{8}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=2\left(6+2\sqrt{5}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}\right)$$

$$=(3+\sqrt{5})\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ r_3=\frac{1}{2\sin(\pi/20)}=\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$$

$(=3.196226\cdots)$



・r_2について

図において，$\angle\mathrm{OAG}=\dfrac{9\pi}{20}$，$\angle\mathrm{GAE}=2\cdot\dfrac{3\pi}{10}$ だから，

$$\angle\mathrm{OAE}=2\pi-\frac{9\pi}{20}-\frac{3\pi}{5}=\frac{19\pi}{20}$$

△ OAE に余弦定理を適用し

$$r_2{}^2=r_1{}^2+1^2-2r_1\cdot1\cdot\cos\frac{19\pi}{20}=r_1{}^2+1+2r_1\cos\frac{\pi}{20}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{20}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

$$\therefore\ r_2{}^2=\frac{6+2\sqrt{5}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{2}+1$$

$$+\sqrt{12+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$$

$$=5+2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}$$ ← WolframAlphaにやってもらいました

$$\therefore\ r_2=\sqrt{5+2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}}$$ $(=4.186838\cdots)$

・r_1について

$$r_1=\mathrm{OD}=\mathrm{OG}+\mathrm{GF}+\mathrm{FD}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan(\pi/20)}+\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\frac{1}{\cos(3\pi/10)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\pi/20)}{\sin(\pi/20)}+\frac{1}{\tan(\pi/5)}+\frac{1}{\sin(\pi/5)}\right)$$

$$\frac{\cos(\pi/20)}{\sin(\pi/20)}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}=\cdots=1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$ ← WolframAlpha

$$\frac{1}{\tan(\pi/5)}+\frac{1}{\sin(\pi/5)}=\frac{\cos(\pi/5)+1}{\sin(\pi/5)}=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ r_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$ $(=4.695717\cdots)$

以上より，求める 3 円の半径は，

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{C}_1:\ \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\\&\mathrm{C}_2:\ \boldsymbol{\sqrt{5+2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}}}\ ,\quad \mathrm{C}_3:\ \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}}\end{aligned}\right\}$$ …[答]