第 452 回

分子が 1 の分数を単位分数といい，分数を異なる単位分数の和で表すことを単位分数分解という。

問題　$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ のように 3 個の単位分数に分解できます。1 を 4 個の単位分数に分解してください。

解答　$a,\ b,\ c,\ d$ は正の整数で，$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ （$a\leqq b\leqq c\leqq d$）とおく。

$a=b=c=d$ のとき，$1=\frac{4}{a}$ より，$a=4$

また，$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}>\frac{1}{a}$ より，$a>1$

$\therefore 2\leqq a\leqq 4$　…①

a を固定する。$1-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

$b=c=d$ のとき，$1-\frac{1}{a}=\frac{3}{b}$ より，$b=\dfrac{3}{1-\frac{1}{a}}$

また，$1-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geqq\frac{1}{b}$ より，$\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\leqq b$

$$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{a}}\leqq b\leqq\frac{3}{1-\frac{1}{a}}$$

b は整数であるから，$\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\right]+1\leqq b\leqq\left[\dfrac{3}{1-\frac{1}{a}}\right]$

一方，$a\leqq b$ より，$Max\left(a,\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\right]\right)\leqq b\leqq\left[\dfrac{3}{1-\frac{1}{a}}\right]$　…②

同様に，$a,\ b$ を固定すると，$Max\left(b,\left[\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\right]\right)\leqq c\leqq\left[\dfrac{2}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\right]$　…③

$a,\ b,\ c$ の値に対して，$d=\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$　…④の値が整数になるとき，$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ と単位分数に分解できる。

以下，①～④を踏まえて，$a,\ b$ の値で場合分けをして，$c,\ d$ の値を求めていく。

⑴　$(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき，$(c,\ d)=(7,\ 42)$，$(8,\ 24)$，$(9,\ 18)$，$(10,\ 15)$，$(12,\ 12)$ の 5 通り。

⑵　$(a,\ b)=(2,\ 4)$ のとき，$(c,\ d)=(5,\ 20)$，$(6,\ 12)$，$(8,\ 8)$ の 3 通り。

⑶　$(a,\ b)=(2,\ 5)$ のとき，$(c,\ d)=(5,\ 10)$ の 1 通り。

⑷　$(a,\ b)=(2,\ 6)$ のとき，$(c,\ d)=(6,\ 6)$ の 1 通り。

⑸　$(a,\ b)=(3,\ 3)$ のとき，$(c,\ d)=(4,\ 12)$，$(6,\ 6)$ の 2 通り。

⑹　$(a,\ b)=(3,\ 4)$ のとき，$(c,\ d)=(4,\ 6)$ の 1 通り。

⑺　$(a,\ b)=(4,\ 4)$ のとき，$(c,\ d)=(4,\ 4)$ の 1 通り。

以上により，$5+3+1+1+2+1+1=14$ 通りの分解が可能である。

よって，1を4個の単位分数に分解すると，

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$，

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$，

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$，$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$，$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$，

$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$，$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$　答

となる。

追加問題1

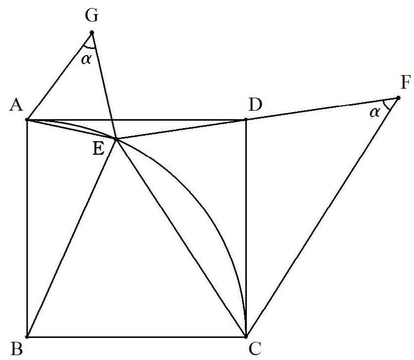
正方形ABCD内のBを中心とする円弧CA上にEをとり，EDの延長上にFを，△FECがFE＝FCの二等辺三角形になるようにとる。

また，図のように，Gを△GAE∽△FECとなるようにとる。

$\angle CFE=\alpha$，$\tan\frac{\alpha}{2}=t$ とおくとき，

(1)　AE/CEの値を t を用いて表せ。

(2)　AB＝a のとき，CE，AEの長さをそれぞれ a，t を用いて求めよ。



解答　△GAE∽△FECであるから，$\frac{AE}{CE}=\frac{GE}{EF}$　…①

である。

△GAB≡△GEB，△FEB≡△FCBであるから，

$\angle ABG+\angle CBF=\angle GBF=45^\circ$　…②

△GABと△FDBについて，

$\angle ABG=45^\circ-\angle GBD=\angle DBF$　…③

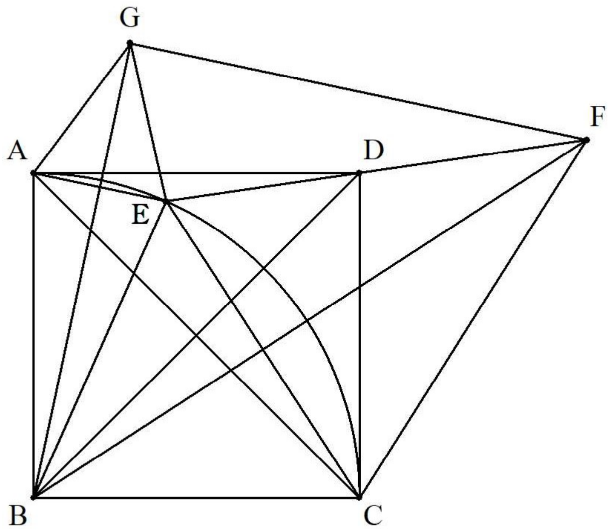
$\angle AGB=\angle DFB=\frac{\alpha}{2}$　…④

③，④より，△GAB∽△FDB

$BG:BF=BA:BD=1:\sqrt{2}$

これと②より，△GBFは直角二等辺三角形となる。

$\therefore\angle BFG=45^\circ$ であるから，$\angle EFG=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$



また，$\angle AEC=\angle ABC$（優角）$\times\frac{1}{2}=\frac{270^\circ}{2}=135^\circ$（∵円周角は中心角の $\frac{1}{2}$）であるから，

$$\angle GEF=360^\circ-\left(\frac{180^\circ-\alpha}{2}+135^\circ+\frac{180^\circ-\alpha}{2}\right)=45^\circ+\alpha$$

△EFGについて，$\angle EFG=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$，$\angle FGE=180^\circ-\left\{(45^\circ+\alpha)+\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right\}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ であるから，

正弦定理により， $\dfrac{GE}{EF}=\dfrac{\sin\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{\sin45^\circ\cos\dfrac{\alpha}{2}-\cos45^\circ\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}$ …⑤

よって，①，⑤より， $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{GE}{EF}=\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}$ 答

⑵ △ACE について，CE＝ x とおくと，⑴ より，AE＝ $\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}x$，∠AEC＝ 135°，AC＝ $\sqrt{2}a$ であるから，

余弦定理により，$\mathrm{AC}^2=\mathrm{CE}^2+\mathrm{AE}^2-2\,\mathrm{CE}\cdot\mathrm{AE}\cos135^\circ$ $(\sqrt{2}a)^2=x^2+\left(\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}x\right)^2-2x\cdot\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

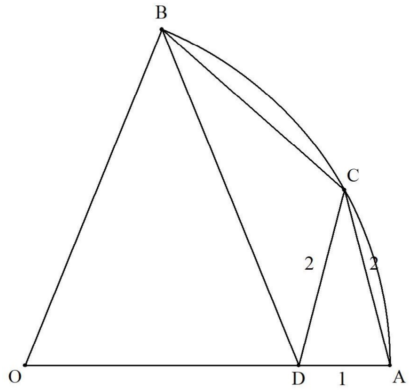
$$x^2=\frac{2a^2}{1+\dfrac{(1-t)^2}{2}+1-t}=\frac{4a^2}{5-4t+t^2}$$

$x>0$ より， $x=\mathrm{CE}=\dfrac{2}{\sqrt{5-4t+t^2}}a$，AE＝ $\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5-4t+t^2}}a=\dfrac{\sqrt{2}(1-t)}{\sqrt{5-4t+t^2}}a$

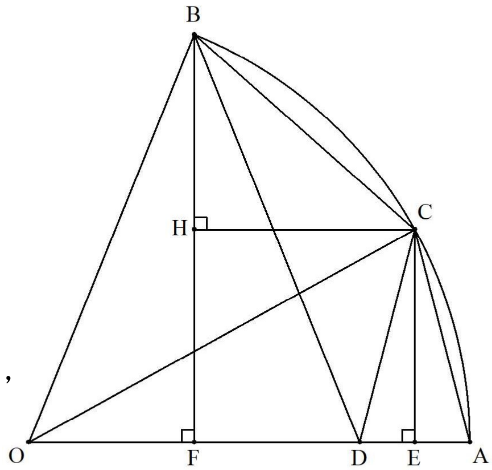
よって，CE＝ $\dfrac{2}{\sqrt{5-4t+t^2}}a$，AE＝ $\dfrac{\sqrt{2}(1-t)}{\sqrt{5-4t+t^2}}a$ 答

追加問題 2

扇形 OAB の弧 AB 上に C を，OA 上に D を
CA＝CD＝ 2，DA＝ 1 となるようにとる。
BO＝BD のとき，BC を求めよ。



解答 CA＝CD＝ a，DA＝ b とおいて考える。
C，B から OA に下した垂線の足をそれぞれ E，F とし，
C から BF に下した垂線の足を H とする。



△CDE について，CD＝ a，DE＝ $\dfrac{b}{2}$ より，

三平方の定理を適用すると，CE＝ $\sqrt{a^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$

便宜的に，OD＝ c とおく。

△COE について，OE＝ $c+\dfrac{b}{2}$，CE＝ $\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$，OC＝ $c+b$ より，

三平方の定理を適用すると，$\left(c+\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}\right)^2=(c+b)^2$

$\therefore c=\dfrac{a^2-b^2}{b}$

△BOF について，OB＝OA＝$c+b=\dfrac{a^2-b^2}{b}+b=\dfrac{a^2}{b}$，OF＝$\dfrac{c}{2}=\dfrac{a^2-b^2}{2b}$ であるから，

三平方の定理を適用すると，BF＝$\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^2-\left(\dfrac{a^2-b^2}{2b}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)}}{2b}$

△BHCについて，BH＝BF－CE＝$\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)}}{2b}-\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$，HC＝$\dfrac{c+b}{2}=\dfrac{a^2}{2b}$ であるから，

三平方の定理を適用すると，BC＝$\sqrt{\left\{\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)}}{2b}-\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}\right\}^2+\left(\dfrac{a^2}{2b}\right)^2}$

$$=\frac{\sqrt{4a^4+6a^2b^2-2b^4-2b\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)(4a^2-b^2)}}}{2b}$$

$$=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(4a^2-b^2)}-b\sqrt{3a^2-b^2}}{2b}$$

さて，$a=2$，$b=1$ の場合，

BC＝$\dfrac{\sqrt{(2^2+1^2)(4\cdot2^2-1^2)}-1\cdot\sqrt{3\cdot2^2-1^2}}{2\cdot1}=\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$ 答

別解 図のように記号を付け，∠CDE＝α，∠BDF＝β，∠BDC＝θとおく。

$\theta=180^\circ-(\alpha+\beta)$

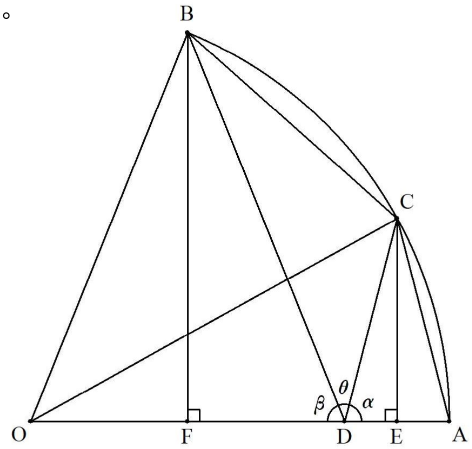
便宜的に，OD＝c とおく。

△COE と△CDE について，CE は共通であるから，

三平方の定理により，$\mathrm{CE}^2=\mathrm{OC}^2-\mathrm{OE}^2=\mathrm{DC}^2-\mathrm{DE}^2$

$(c+b)^2-\left(c+\dfrac{b}{2}\right)^2=a^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \quad \therefore c=\dfrac{a^2-b^2}{b}$

したがって扇形の半径は，$c+b=\dfrac{a^2-b^2}{b}+b=\dfrac{a^2}{b}$ $\quad\therefore \mathrm{BD}=\dfrac{a^2}{b}$



$\cos\alpha=\dfrac{\frac{b}{2}}{a}=\dfrac{b}{2a}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}$

$\cos\beta=\dfrac{\frac{c}{2}}{\frac{a^2}{b}}=\dfrac{\frac{a^2-b^2}{2b}}{\frac{a^2}{b}}=\dfrac{a^2-b^2}{2a^2}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)}}{2a^2}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{b}{2a}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{2a^2}-\dfrac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}\cdot\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)}}{2a^2}$

$=\dfrac{b(a^2-b^2)-\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)(4a^2-b^2)}}{4a^3}$ より

$\cos\theta=\cos\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}=-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{-b(a^2-b^2)+\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)(4a^2-b^2)}}{4a^3}$

よって、△BDC に余弦定理を適用すると，

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BD}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}\cos\theta=\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^2+a^2-2\left(\dfrac{a^2}{b}\right)a\cdot\dfrac{-b(a^2-b^2)+\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)(4a^2-b^2)}}{4a^3}$

$$=\frac{2a^4+3a^2b^2-b^4-b\sqrt{(a^2+b^2)(3a^2-b^2)(4a^2-b^2)}}{2b^2}=\left\{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(4a^2-b^2)}-b\sqrt{3a^2-b^2}}{2b}\right\}^2$$

BC>0 より，$\mathrm{BC}=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(4a^2-b^2)}-b\sqrt{3a^2-b^2}}{2b}$

さて，$a=2$，$b=1$ の場合，

$\mathrm{BC}=\dfrac{\sqrt{(2^2+1^2)(4\cdot 2^2-1^2)}-1\cdot\sqrt{3\cdot 2^2-1^2}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$　答

（2025/3/3　ジョーカー）

余力問題　1を5個の異なる単位分数に分解すると，何組になりますか。

解答　a，b，c，d，e は正の整数で，$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}$（$a\leqq b\leqq c\leqq d\leqq e$）とおく。

$a=b=c=d=e$ のとき，$1=\dfrac{5}{a}$ より，$a=5$

また，$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{a}$ より，$a>1$

$\therefore 2\leqq a\leqq 5$　…①

a を固定する。$1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}$

$b=c=d=e$ のとき，$1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}$ より，$b=\dfrac{4}{1-\frac{1}{a}}$

また，$1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{b}$ より，$\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}<b$

$\therefore \dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}<b\leqq\dfrac{4}{1-\frac{1}{a}}$

b は整数であるから，$\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\right]+1\leqq b\leqq\left[\dfrac{4}{1-\frac{1}{a}}\right]$

一方，$a\leqq b$ より，$Max\left(a,\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\right]\right)\leqq b\leqq\left[\dfrac{4}{1-\frac{1}{a}}\right]$　…②

同様に，a，b を固定すると，$Max\left(b,\left[\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\right]\right)\leqq c\leqq\left[\dfrac{3}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\right]$　…③

a，b，c を固定すると，$Max\left(c,\left[\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\right]\right)\leqq d\leqq\left[\dfrac{2}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\right]$　…④

a，b，c，d の値に対して，$e=\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}$　…⑤の値が整数になるとき，$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}$

と単位分数に分解できる。

以下，①～⑤を踏まえて，a，b，c の値で場合分けをして，d，e の値を求めていく。

(1)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 7)$のとき，$(d,\ e)=(43,\ 1806)$，$(44,\ 924)$，$(45,\ 630)$，$(46,\ 483)$，$(48,\ 336)$，$(49,\ 294)$，$(51,\ 238)$，$(54,\ 189)$，$(56,\ 168)$，$(60,\ 140)$，$(63,\ 126)$，$(70,\ 105)$，$(78,\ 91)$，$(84,\ 84)$の14通り。

(2)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 8)$のとき，$(d,\ e)=(25,\ 600)$，$(26,\ 312)$，$(27,\ 216)$，$(28,\ 168)$，$(30,\ 120)$，$(32,\ 96)$，$(33,\ 88)$，$(36,\ 72)$，$(40,\ 60)$，$(42,\ 56)$，$(48,\ 48)$の11通り。

(3)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 9)$のとき，$(d,\ e)=(19,\ 342)$，$(20,\ 180)$，$(21,\ 126)$，$(22,\ 99)$，$(24,\ 72)$，$(27,\ 54)$，$(30,\ 45)$，$(36,\ 36)$の８通り。

(4)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 10)$のとき，$(d,\ e)=(16,\ 240)$，$(18,\ 90)$，$(20,\ 60)$，$(24,\ 40)$，$(30,\ 30)$の５通り。

(5)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 11)$のとき，$(d,\ e)=(14,\ 231)$，$(15,\ 110)$，$(22,\ 23)$の３通り。

(6)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 12)$のとき，$(d,\ e)=(13,\ 156)$，$(14,\ 84)$，$(15,\ 60)$，$(16,\ 48)$，$(18,\ 36)$，$(20,\ 30)$，$(21,\ 28)$，$(24,\ 24)$の８通り。

(7)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 13)$のとき，$(d,\ e)=(13,\ 78)$の１通り。

(8)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 14)$のとき，$(d,\ e)=(14,\ 42)$，$(15,\ 35)$，$(21,\ 21)$の３通り。

(9)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 15)$のとき，$(d,\ e)=(15,\ 30)$，$(20,\ 20)$の２通り。

(10)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 16)$のとき，$(d,\ e)=(16,\ 24)$の１通り。

(11)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 18)$のとき，$(d,\ e)=(18,\ 18)$の１通り。

(12)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 5)$のとき，$(d,\ e)=(21,\ 420)$，$(22,\ 220)$，$(24,\ 120)$，$(25,\ 100)$，$(28,\ 70)$，$(30,\ 60)$，$(36,\ 45)$，$(40,\ 40)$の８通り。

(13)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 6)$のとき，$(d,\ e)=(13,\ 156)$，$(14,\ 84)$，$(15,\ 60)$，$(16,\ 48)$，$(18,\ 36)$，$(20,\ 30)$，$(21,\ 28)$，$(24,\ 24)$の８通り。

(14)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 7)$のとき，$(d,\ e)=(10,\ 140)$，$(12,\ 42)$，$(14,\ 28)$の３通り。

(15)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 8)$のとき，$(d,\ e)=(9,\ 72)$，$(10,\ 40)$，$(12,\ 24)$，$(16,\ 16)$の４通り。

(16)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 9)$のとき，$(d,\ e)=(9,\ 36)$，$(12,\ 18)$の２通り。

(17)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 10)$のとき，$(d,\ e)=(10,\ 20)$，$(12,\ 15)$の２通り。

(18)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 12)$のとき，$(d,\ e)=(12,\ 12)$の１通り。

(19)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 5)$のとき，$(d,\ e)=(11,\ 110)$，$(12,\ 60)$，$(14,\ 35)$，$(15,\ 30)$，$(20,\ 20)$の５通り。

(20)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 6)$のとき，$(d,\ e)=(8,\ 120)$，$(9,\ 45)$，$(10,\ 30)$，$(12,\ 20)$，$(15,\ 15)$の５通り。

(21)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 7)$のとき，$(d,\ e)=(7,\ 70)$の１通り。

(22)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 8)$のとき，$(d,\ e)=(8,\ 20)$の１通り。

(23)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 10)$のとき，$(d,\ e)=(10,\ 10)$の１通り。

(24)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 6,\ 6)$のとき，$(d,\ e)=(7,\ 42)$，$(8,\ 24)$，$(9,\ 18)$，$(10,\ 15)$，$(12,\ 12)$の５通り。

(25)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 6,\ 7)$のとき，$(d,\ e)=(7,\ 21)$の１通り。

(26)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 6,\ 8)$のとき，$(d,\ e)=(8,\ 12)$の１通り。

(27)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 6,\ 9)$のとき，$(d,\ e)=(9,\ 9)$の１通り。

(28)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 7,\ 7)$のとき，$(d,\ e)=(7,\ 14)$の１通り。

(29)　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 8,\ 8)$のとき，$(d,\ e)=(8,\ 8)$の１通り。

以上により，$\boxed{a=2\text{ のとき，108通り。}}$

(30)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 4)$のとき，$(d,\ e)=(13,\ 156)$，$(14,\ 84)$，$(15,\ 60)$，$(16,\ 48)$，$(18,\ 36)$，$(20,\ 30)$，$(21,\ 28)$，$(24,\ 24)$の８通り。

(31)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 5)$のとき，$(d,\ e)=(8,\ 120)$，$(9,\ 45)$，$(10,\ 30)$，$(12,\ 20)$，$(15,\ 15)$の５通り。

(32)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 6)$のとき，$(d,\ e)=(7,\ 42)$，$(8,\ 24)$，$(9,\ 18)$，$(10,\ 15)$，$(12,\ 12)$の５通り。

(33)　$(a, b, c)=(3, 3, 7)$ のとき，$(d, e)=(7, 21)$ の1通り。

(34)　$(a, b, c)=(3, 3, 8)$ のとき，$(d, e)=(8, 12)$ の1通り。

(35)　$(a, b, c)=(3, 3, 9)$ のとき，$(d, e)=(9, 9)$ の1通り。

(36)　$(a, b, c)=(3, 4, 4)$ のとき，$(d, e)=(7, 42)$，$(8, 24)$，$(9, 18)$，$(10, 15)$，$(12, 12)$ の5通り。

(37)　$(a, b, c)=(3, 4, 5)$ のとき，$(d, e)=(5, 60)$，$(6, 20)$ の2通り。

(38)　$(a, b, c)=(3, 4, 6)$ のとき，$(d, e)=(6, 12)$，$(8, 8)$ の2通り。

(39)　$(a, b, c)=(3, 5, 5)$ のとき，$(d, e)=(5, 15)$，$(6, 10)$ の2通り。

(40)　$(a, b, c)=(3, 6, 6)$ のとき，$(d, e)=(6, 6)$ の1通り。

以上により，$\boxed{a=3 \text{ のとき，33通り。}}$

(41)　$(a, b, c)=(4, 4, 4)$ のとき，$(d, e)=(5, 20)$，$(6, 12)$，$(8, 8)$ の3通り。

(42)　$(a, b, c)=(4, 4, 5)$ のとき，$(d, e)=(5, 10)$ の1通り。

(43)　$(a, b, c)=(4, 4, 6)$ のとき，$(d, e)=(6, 6)$ の1通り。

以上により，$\boxed{a=4 \text{ のとき，5通り。}}$

(44)　$(a, b, c)=(5, 5, 5)$ のとき，$(d, e)=(5, 5)$ の1通り。

以上により，$\boxed{a=5 \text{ のとき，1通り。}}$

$a=2, 3, 4, 5$ の場合を合計すると，$108+33+5+1=147$ 通りの分解が可能である。

よって，1を5個の異なる単位分数に分解する方法は，147通り（組）　答

(2025/3/7　ジョーカー)