問題 1を4つの単位分数に分解できたとして、正の整数a、b、c、dに対して、

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

とします。ただし、数式の対称性から、$a \leq b \leq c \leq d$として構いません。すると、

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq \frac{4}{a} \Rightarrow a \leq 4$$

なので、$a=2$、3、4の各々について調べます。

$a=2$の場合

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq \frac{3}{b} \Rightarrow b \leq 6$$

なので、$b=2$、3、4、5、6が解の候補になります。

$b=2$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0 \Rightarrow \text{解なし}$$

$b=3$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6} \Rightarrow (c,d)=(7,42)(8,24)(9,18)(10,15)(12,12)$$

$b=4$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{4} \Rightarrow (c,d)=(5,20)(6,12)(8,8)$$

$b=5$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{10} \Rightarrow (c,d)=(10,20)$$

$b=6$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{3} \Rightarrow (c,d)=(4,12)(6,6)$$

$a=3$の場合

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq \frac{3}{b} \Rightarrow b \leq \frac{9}{2} \Rightarrow b \leq 4$$

なので、$b=2$、3、4が解の候補になります。

$b=2$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6} \Rightarrow \text{解なし}$$

$b=3$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{3} \Rightarrow (c,d)=(4,12)(6,6)$$

$b=4$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{5}{12}\Rightarrow(c,d)=(3,12)(4,6)$$

$a=4$の場合

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\le\frac{3}{b}\Rightarrow b\le 4$$

なので、$b=4$が解の候補になります。

$b=4$の場合

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}\Rightarrow(c,d)=(3,6)(4,4)$$

以上より,

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) \;=\; &(2,3,7,42)(2,3,8,24)(2,3,9,18)(2,3,10,15)(2,3,12,12)(2,4,5,20)(2,4,6,12)\\ &(2,4,8,8)(3,3,4,12)(3,3,6,6)(3,3,4,12)(3,3,6,6)(3,4,4,6)(4,4,4,4)\end{aligned}$$

なので、次の14個の部分分数に分解できます。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

余力問題　手間が掛かることを除けば、前問と同様です。補足1に記載した通り、プログラムで調べると、147個ありました。

追加問題1

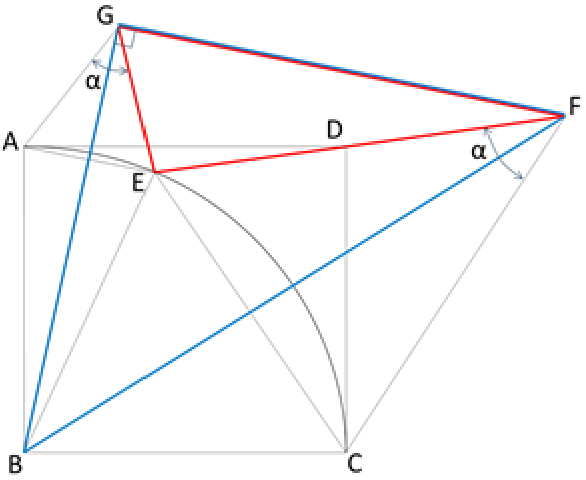
(1) 下図に示した青色の⊿GBFは直角二等辺三角形です。シンプルなやり方が思いつかなかったので、座標系を使って証明しました。汚いので、補足2に添付しておきます。

すると、赤色の⊿GEFの角の大きさはαで表すことができますから、正弦定理を適用して、

$$\frac{\mathrm{EG}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\mathrm{EF}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EF}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{t})}{2}$$



ここで、⊿GAEと⊿FECは相似なので、

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EF}}=\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{t})}{2}\cdots①$$

です。

(2) 右図に示した赤色の⊿ACEに余弦定理を適用すると、

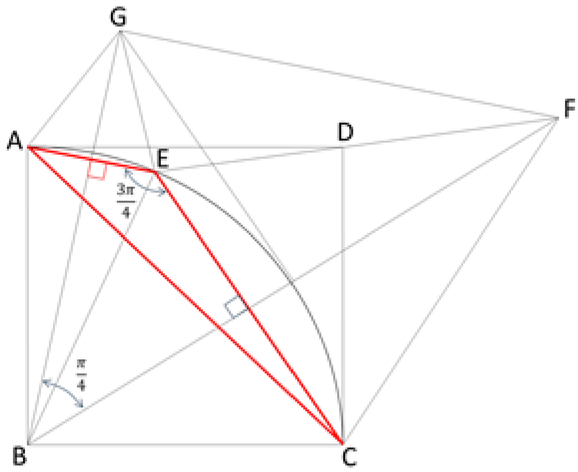
$$\frac{\mathrm{AE}^2+\mathrm{CE}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{CE}}=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\mathrm{AE}^2+\mathrm{CE}^2-\left(\sqrt{2}\mathrm{a}\right)^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{CE}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots②$$

です。①②を解くと、

$$(\mathrm{CE},\mathrm{AE})=\left(\pm\frac{2\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}+5}},\pm\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{t})\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}+5}}\right)$$

です。



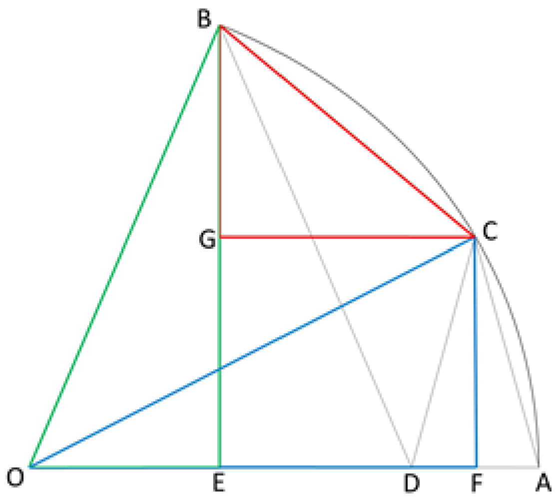
ここで、$\mathrm{CE}>0,\mathrm{AE}>0$なので、有効な解は、

$$(\mathrm{CE},\mathrm{AE})=\left(\frac{2\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}+5}},\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{t})\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}+5}}\right)$$

です。

追加問題2

右図のように、B、CからOAに垂直に下した点をE、Fとして、CからBEに垂直に下した点をGとします。また、扇形OABの半径をr、$\mathrm{OD}=\mathrm{w}$、$\mathrm{BE}=\mathrm{h}$、$\mathrm{BC}=\mathrm{x}$とします。



緑色の三角形に三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{OE}^2+\mathrm{BE}^2=\mathrm{OB}^2 \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{w}}{2}\right)^2+\mathrm{h}^2=\mathrm{r}^2 \cdots ①$$

です。青色の三角形にも、適用すると

$$\mathrm{OF}^2+\mathrm{CF}^2=\mathrm{OC}^2 \Rightarrow \mathrm{OF}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{DF}^2=\mathrm{OC}^2$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{w}+\frac{1}{2}\right)^2+2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathrm{r}^2 \cdots ②$$

です。そして、赤色の三角形にも、適用して、

$$\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2=\mathrm{BC}^2 \Rightarrow (\mathrm{BE}-\mathrm{CF})^2+\mathrm{CG}^2=\mathrm{BC}^2$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{h}-\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{w}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\mathrm{x}^2 \cdots ③$$

です。また、

$$\mathrm{OD}+\mathrm{DA}=\mathrm{OA} \Rightarrow \mathrm{w}+1=\mathrm{r} \cdots ④$$

です。①②③④を解くと、

$$(\mathrm{w},\mathrm{h},\mathrm{r},\mathrm{x})=\left(3,\pm\frac{\sqrt{55}}{2},4,\frac{5\sqrt{3}\mp\sqrt{11}}{2}\right)$$

ですが、$\mathrm{h}>0$なので、

$$(\mathrm{w},\mathrm{h},\mathrm{r},\mathrm{x})=\left(3,\frac{\sqrt{55}}{2},4,\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}\right)$$

が有効な解となります。よって、$\mathrm{BC}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$です。

補足1　1を5個の単位分数に分解

1/2+1/3+1/7+1/43+1/1806
1/2+1/3+1/7+1/44+1/924
1/2+1/3+1/7+1/45+1/630
1/2+1/3+1/7+1/46+1/483
1/2+1/3+1/7+1/48+1/336
1/2+1/3+1/7+1/49+1/294
1/2+1/3+1/7+1/51+1/238
1/2+1/3+1/7+1/54+1/189
1/2+1/3+1/7+1/56+1/168
1/2+1/3+1/7+1/60+1/140
1/2+1/3+1/7+1/63+1/126
1/2+1/3+1/7+1/70+1/105
1/2+1/3+1/7+1/78+1/91
1/2+1/3+1/7+1/84+1/84
1/2+1/3+1/8+1/25+1/600
1/2+1/3+1/8+1/26+1/312
1/2+1/3+1/8+1/27+1/216
1/2+1/3+1/8+1/28+1/168
1/2+1/3+1/8+1/30+1/120
1/2+1/3+1/8+1/32+1/96
1/2+1/3+1/8+1/33+1/88
1/2+1/3+1/8+1/36+1/72
1/2+1/3+1/8+1/40+1/60
1/2+1/3+1/8+1/42+1/56
1/2+1/3+1/8+1/48+1/48
1/2+1/3+1/9+1/19+1/342
1/2+1/3+1/9+1/20+1/180
1/2+1/3+1/9+1/21+1/126
1/2+1/3+1/9+1/22+1/99
1/2+1/3+1/9+1/24+1/72
1/2+1/3+1/9+1/27+1/54
1/2+1/3+1/9+1/30+1/45
1/2+1/3+1/9+1/36+1/36
1/2+1/3+1/10+1/16+1/240
1/2+1/3+1/10+1/18+1/90
1/2+1/3+1/10+1/20+1/60
1/2+1/3+1/10+1/24+1/40
1/2+1/3+1/10+1/30+1/30
1/2+1/3+1/11+1/14+1/231
1/2+1/3+1/11+1/15+1/110
1/2+1/3+1/11+1/22+1/33
1/2+1/3+1/12+1/13+1/156
1/2+1/3+1/12+1/14+1/84
1/2+1/3+1/12+1/15+1/60
1/2+1/3+1/12+1/16+1/48
1/2+1/3+1/12+1/18+1/36
1/2+1/3+1/12+1/20+1/30
1/2+1/3+1/12+1/21+1/28
1/2+1/3+1/12+1/24+1/24
1/2+1/3+1/13+1/13+1/78
1/2+1/3+1/14+1/14+1/42
1/2+1/3+1/14+1/15+1/35
1/2+1/3+1/14+1/21+1/21
1/2+1/3+1/15+1/15+1/30
1/2+1/3+1/15+1/20+1/20
1/2+1/3+1/16+1/16+1/24
1/2+1/3+1/18+1/18+1/18
1/2+1/4+1/5+1/21+1/420
1/2+1/4+1/5+1/22+1/220
1/2+1/4+1/5+1/24+1/120
1/2+1/4+1/5+1/25+1/100
1/2+1/4+1/5+1/28+1/70
1/2+1/4+1/5+1/30+1/60
1/2+1/4+1/5+1/36+1/45
1/2+1/4+1/5+1/40+1/40
1/2+1/4+1/6+1/13+1/156
1/2+1/4+1/6+1/14+1/84
1/2+1/4+1/6+1/15+1/60
1/2+1/4+1/6+1/16+1/48
1/2+1/4+1/6+1/18+1/36
1/2+1/4+1/6+1/20+1/30
1/2+1/4+1/6+1/21+1/28
1/2+1/4+1/6+1/24+1/24
1/2+1/4+1/7+1/10+1/140
1/2+1/4+1/7+1/12+1/42
1/2+1/4+1/7+1/14+1/28
1/2+1/4+1/8+1/9+1/72
1/2+1/4+1/8+1/10+1/40
1/2+1/4+1/8+1/12+1/24
1/2+1/4+1/8+1/16+1/16
1/2+1/4+1/9+1/9+1/36
1/2+1/4+1/9+1/12+1/18
1/2+1/4+1/10+1/10+1/20
1/2+1/4+1/10+1/12+1/15
1/2+1/4+1/12+1/12+1/12
1/2+1/5+1/5+1/11+1/110
1/2+1/5+1/5+1/12+1/60
1/2+1/5+1/5+1/14+1/35
1/2+1/5+1/5+1/15+1/30
1/2+1/5+1/5+1/20+1/20
1/2+1/5+1/6+1/8+1/120
1/2+1/5+1/6+1/9+1/45
1/2+1/5+1/6+1/10+1/30
1/2+1/5+1/6+1/12+1/20
1/2+1/5+1/6+1/15+1/15
1/2+1/5+1/7+1/7+1/70
1/2+1/5+1/8+1/8+1/20
1/2+1/5+1/10+1/10+1/10
1/2+1/6+1/6+1/7+1/42
1/2+1/6+1/6+1/8+1/24
1/2+1/6+1/6+1/9+1/18
1/2+1/6+1/6+1/10+1/15
1/2+1/6+1/6+1/12+1/12
1/2+1/6+1/7+1/7+1/21
1/2+1/6+1/8+1/8+1/12
1/2+1/6+1/9+1/9+1/9
1/2+1/7+1/7+1/7+1/14
1/2+1/8+1/8+1/8+1/8
1/3+1/3+1/4+1/13+1/156
1/3+1/3+1/4+1/14+1/84
1/3+1/3+1/4+1/15+1/60
1/3+1/3+1/4+1/16+1/48
1/3+1/3+1/4+1/18+1/36
1/3+1/3+1/4+1/20+1/30
1/3+1/3+1/4+1/21+1/28
1/3+1/3+1/4+1/24+1/24
1/3+1/3+1/5+1/8+1/120
1/3+1/3+1/5+1/9+1/45
1/3+1/3+1/5+1/10+1/30
1/3+1/3+1/5+1/12+1/20
1/3+1/3+1/5+1/15+1/15
1/3+1/3+1/6+1/7+1/42
1/3+1/3+1/6+1/8+1/24
1/3+1/3+1/6+1/9+1/18
1/3+1/3+1/6+1/10+1/15
1/3+1/3+1/6+1/12+1/12
1/3+1/3+1/7+1/7+1/21
1/3+1/3+1/8+1/8+1/12
1/3+1/3+1/9+1/9+1/9
1/3+1/4+1/4+1/7+1/42
1/3+1/4+1/4+1/8+1/24
1/3+1/4+1/4+1/9+1/18
1/3+1/4+1/4+1/10+1/15
1/3+1/4+1/4+1/12+1/12
1/3+1/4+1/5+1/5+1/60
1/3+1/4+1/5+1/6+1/20
1/3+1/4+1/6+1/6+1/12
1/3+1/4+1/6+1/8+1/8
1/3+1/5+1/5+1/5+1/15
1/3+1/5+1/5+1/6+1/10
1/3+1/6+1/6+1/6+1/6
1/4+1/4+1/4+1/5+1/20
1/4+1/4+1/4+1/6+1/12
1/4+1/4+1/4+1/8+1/8
1/4+1/4+1/5+1/5+1/10
1/4+1/4+1/6+1/6+1/6
1/5+1/5+1/5+1/5+1/5

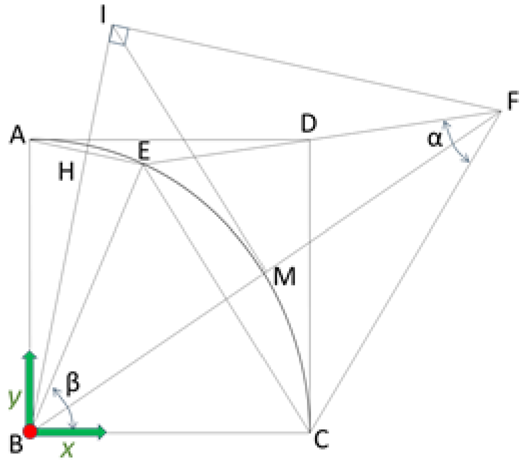
以上、147 個です。

参考までに、プログラムを載せておきます。

```
UnitFraction(m)={
	local(denominators);
	count = 0;
	denominators = vector(m);
	UnitFractionDecomposition(1, 2, 0, denominators);
	print(count, "個");
}
UnitFractionDecomposition(p, n, s, denominators)={
	local(d, x, z, i);
	if (p < length(denominators),
		d = n;
		while (1,
			x = 1 / d;
			if (1 - s > x * (length(denominators) - p + 1), break);
			z = s + x;
			if (z < 1,
				denominators[p] = x;
				UnitFractionDecomposition(p + 1, d, z, denominators);
			);
			d++;
		)
	,
		if (p == length(denominators),
			x = 1 - s;
			if (numerator(x) == 1,
				denominators[p] = x;
				for(i = 1, p,
					print1(denominators[i], " ");
				);
				print();
				count++;
			);
		);
	);
}
```

補足２ ⊿GBFが直角二等辺三角形であることの証明

右図のように座標系を導入します。問題文のGと左図のIが一致することを示すことによって、⊿GBFが直角二等辺三角形であることを証明します。



正方形の一辺の長さをaとすると、正方形の各頂点は、

$\mathrm{A}(0,a), \mathrm{B}(0,0), \mathrm{C}(a,0), \mathrm{D}(a,a)$

と表すことができます。また、$\angle\mathrm{CBE}=\beta$とすると、

$\mathrm{E}(a\cos\beta, a\sin\beta)$

です。D, E, Fは同一直線上にあるので、$s>1$に対して、

$$\mathrm{F}=\mathrm{E}+s\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\left(a(s+(1-s)\cos\beta), a(s+(1-s)\sin\beta)\right)$$

です。また、EをFの回りにα回転させると、Cに一致するので、

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}a\cos\beta\\ a\sin\beta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a(s+(1-s)\cos\beta)\\ a(s+(1-s)\sin\beta)\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}a(s+(1-s)\cos\beta)\\ a(s+(1-s)\sin\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s\sin\alpha+(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}{(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}\\ \dfrac{(2s^2-s)\cos\alpha-2s^2+s}{(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}\end{bmatrix}$$

ここで、$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$なので、

$$\Rightarrow\left\{\frac{s\sin\alpha+(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}{(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}\right\}^2+\left\{\frac{(2s^2-s)\cos\alpha-2s^2+s}{(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}\right\}^2=1$$

$$\Rightarrow -2s(s\cos\alpha+\sin\alpha-s)=0\Rightarrow s=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdots①$$

です。線分BFの中点をMとすると、

$$\mathrm{M}=\frac{\mathrm{B}+\mathrm{F}}{2}=\frac{(0,0)+\left(a(s+(1-s)\cos\beta), a(s+(1-s)\sin\beta)\right)}{2}$$

$$=\left(\frac{a(2\sin\alpha-s\cos\alpha-\cos\alpha-s-2)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)},\frac{a(s\sin\alpha+\sin\alpha-2\cos\alpha-s-2)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)}\right)$$

です。

IはBをMの回りに$-\frac{\pi}{2}$回転した点なので、

$$\mathrm{I}=\begin{bmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{a(2\sin\alpha-s\cos\alpha-\cos\alpha-s-2)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)}\\ \frac{a(s\sin\alpha+\sin\alpha-2\cos\alpha-s-2)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)}\end{bmatrix}\right]$$

$$+\begin{bmatrix}\frac{a(2\sin\alpha-s\cos\alpha-\cos\alpha-s-2)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)}\\ \frac{a(s\sin\alpha+\sin\alpha-2\cos\alpha-s-2)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=\left(\frac{a(1-s)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)},\frac{a(s\sin\alpha+3\sin\alpha-s\cos\alpha-3\cos\alpha-2s-4)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)}\right)$$

です。線分AEの中点をHとすると、

$$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{E}}{2}=\frac{(a,0)+(a\cos\beta,a\sin\beta)}{2}$$

$$=\frac{(a,0)+\left(a\frac{s\sin\alpha+(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}{(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1},a\frac{(2s^2-s)\cos\alpha-2s^2+s}{(2s^2-2s)\cos\alpha-2s^2+2s-1}\right)}{2}$$

$$=\left(\frac{a(2\sin\alpha-\cos\alpha-2)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)},\frac{a(3\sin\alpha-4\cos\alpha-5)}{2(2\sin\alpha-2\cos\alpha-3)}\right)$$

となるので、

$$\tan^2\angle\mathrm{AIH}=\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{IH}^2}$$

$$=\frac{5\sin^2\alpha+(-4\cos\alpha-10)\sin\alpha+\cos^2\alpha+4\cos\alpha+5}{(2s^2+2s+1)\sin^2\alpha+(-4\cos\alpha-4s^2-2s-4)\sin\alpha+(2s^2-6s+5)\cos^2\alpha+(4s^2-10s+10)\cos\alpha+4s^2-4s+5}$$

$$=\frac{\sin\alpha-1}{s\sin\alpha+(s-1)\cos\alpha-s^2+s-1}$$

です。上式に①を代入して、

$$\tan^2\angle\mathrm{AIH}=\frac{\sin\alpha-1}{\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\sin\alpha+\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-1\right)\cos\alpha-\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^2+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-1}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan^2\frac{\alpha}{2}$$

ですから、$\angle\mathrm{AIH}=\frac{\alpha}{2}$となり、問題文のGとIが一致するので、⊿GBFは直角二等辺三角形です。