452解答　よふかしのつらいおじさん

問題

1の単位分数分解について考えます。

$$● 分子が1の最大の分数は \frac{1}{2} なので、2個に単位分数分解はできません。$$

$$\left( \frac{1}{2}×2=1となります \right)$$

$$3個の場合 1÷3=\frac{1}{3} なので、\frac{1}{3} より大きな数と小さな数が必要です。$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \cdots \left(1\right)$$

$$\left( \frac{1}{3} を使わない分解は、\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20} より成立しません\right)$$

式(1)の分母の最大は、6です。

6＝2×3 です。

6を3個の6の約数の和で表すと、6＝3＋2＋1 ･･･　(2)

式(2)を6で割ると、

$$6=3+2+1 \rightarrow \frac{6}{6}=\frac{3+2+1}{6} \rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

* ところで、6は完全数です。

もとの数をその約数で割ると、分子は必ず1になります。

28、496なども完全数です。

$$28=2^{2}×7=1+2+4+7+14$$

$$496=2^{4}×31=1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

なので、

$$1=\frac{14+7+4+2+1}{28}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$$

$$1=\frac{248+124+62+31+16+8+4+2+1}{496}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}$$

* 完全数でなくてもその約数の何個かの和がその数になれば1の単位分数分解ができます。

・例えば、

$$30=2×3×5 \rightarrow 30=\left\{\begin{array}{c}15+10+5\\15+10+3+2\\15+6+5+3+1\end{array}\right.$$

なので、

$$\left\{\begin{array}{c}1=\frac{15+10+5}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \\1=\frac{15+10+3+2}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \\1=\frac{15+6+5+3+1}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\end{array}\right.$$

解答にうつります。

* 4個の単位分数分解を考えます。

$$(1) 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} のパターン\left( \frac{1}{6}を分解 \right)$$

$$ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6} なので、x=7,8,9,10,11,\cdots $$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{42} \rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{24} \rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18} \rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{15} \rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{66}=\frac{1}{13.2} \rightarrow 4個にならない$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12} \rightarrow 異なる4個の単位分数にならない$$

$$(2) 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} のパターン\left( \frac{1}{3}を用いない\right)$$

$$ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4} なので、x=5,6,7,\cdots $$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{20} \rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12} \rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{28}=\frac{1}{9.3333\cdots } \rightarrow 4個にならない$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8} \rightarrow 異なる4個の単位分数にならない$$

$$(3) 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} のパターン\left( \frac{1}{3}を用いない\right)$$

$$ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}=\frac{1}{3.33\cdots } なので、x=6,7,\cdots $$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{15}=\frac{1}{7.5} \rightarrow 4個にならない$$

$$・ 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{11}{70}=\frac{1}{6.3636\cdots } \rightarrow このパターンはない$$

$$(4) 1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} のパターン\left( \frac{1}{2}を用いない\right)$$

$$ 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}=\frac{1}{2.4} なので、x=5,6,\cdots $$

$$・ 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{13}{60}=\frac{1}{4.6153\cdots } \rightarrow これ以降のパターンはない$$

以上から6種類あることが解ります。

余力問題

4個の場合をもとに考えます。(エクセルでの計算結果です)

結果は、分母のみを羅列します。

$$● 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w} のグループ$$







$$● 1=\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w} のグループ$$



追加問題1

［1］

* 図のように座標軸をとります。

すると各点の座標は、

$$A\left(0,a\right), B\left(0,0\right), C\left(a,0\right), D\left(a,a\right), E\left(a\cos(θ),a\sin(θ)\right)$$

直線BFは、線分ECの垂直二等分線なので、EまでとCまでの距離が等しいとして、

$$\left(x-a\cos(θ)\right)^{2}+\left(y-a\sin(θ)\right)^{2}=\left(x-a\right)^{2}+y^{2} \rightarrow y=\frac{1-\cos(θ)}{\sin(θ)}x \cdots \left(1\right)$$

直線EFは、2点E、Dで傾きを調べ、Dを通るとして、

$$y-a=\frac{1-\sin(θ)}{1-\cos(θ)}\left(x-a\right) \cdots \left(2\right)$$

(1)、(2)を連立させて、交点Fを調べると、

$$F\left(\frac{\sin(θ)\left(\cos(θ)-\sin(θ)\right)}{\sin(θ)+2\cos(θ)-2}a,\frac{\left(1-\cos(θ)\right)\left(\cos(θ)-\sin(θ)\right)}{\sin(θ)+2\cos(θ)-2}a\right)$$

あらかじめECとFEの2乗の値を調べておきます。

$$EC^{2}=\left(a-a\cos(θ)\right)^{2}+a^{2}=2a^{2}\left(1-\cos(θ)\right)$$

$$FE^{2}=\left\{\frac{\sin(θ)\left(\cos(θ)-\sin(θ)\right)}{\sin(θ)+2\cos(θ)-2}a-a\cos(θ)\right\}^{2}+\left\{\frac{\left(1-\cos(θ)\right)\left(\cos(θ)-\sin(θ)\right)}{\sin(θ)+2\cos(θ)-2}a-a\sin(θ)\right\}^{2}$$

$$= \cdots $$

$$=\left\{\frac{a}{\sin(θ)+2\cos(θ)-2}\right\}^{2}×\left\{-2cos^{3}θ+\left(-2\sin(θ)+7\right)cos^{2}θ+\left(4\sin(θ)-8\right)\cos(θ)+\left(-2\sin(θ)+3\right)\right\}$$

* ここで、α/2の三角関数を調べます。

$$sin^{2}\frac{α}{2}=\left(\frac{EM}{FE}\right)^{2}=\left(\frac{EC}{2×FE}\right)^{2}=\frac{EC^{2}}{4FE^{2}}$$

$$=\frac{2a^{2}\left(1-\cos(θ)\right)}{4\left\{\frac{a}{\sin(θ)+2\cos(θ)-2}\right\}^{2}×\left\{-2cos^{3}θ+\left(-2\sin(θ)+7\right)cos^{2}θ+\left(4\sin(θ)-8\right)\cos(θ)+\left(-2\sin(θ)+3\right)\right\}}$$

$$=\cdots $$

$$=\frac{\left(\sin(θ)+2\cos(θ)-2\right)^{2}}{2\left(1-\cos(θ)\right)\left(3-2\cos(θ)-2\sin(θ)\right)}$$

$$tan^{2}\frac{α}{2}=\frac{1}{cos^{2}\frac{α}{2}}-1=\frac{1-cos^{2}\frac{α}{2}}{cos^{2}\frac{α}{2}}=\frac{sin^{2}\frac{α}{2}}{1-sin^{2}\frac{α}{2}}=\frac{\frac{\left(\sin(θ)+2\cos(θ)-2\right)^{2}}{2\left(1-\cos(θ)\right)\left(3-2\cos(θ)-2\sin(θ)\right)}}{1-\frac{\left(\sin(θ)+2\cos(θ)-2\right)^{2}}{2\left(1-\cos(θ)\right)\left(3-2\cos(θ)-2\sin(θ)\right)}}$$

$$=\frac{\left(\sin(θ)+2\cos(θ)-2\right)^{2}}{2\left(1-\cos(θ)\right)\left(3-2\cos(θ)-2\sin(θ)\right)-\left(\sin(θ)+2\cos(θ)-2\right)^{2}}=\left(\frac{2-2\cos(θ)-\sin(θ)}{1-\cos(θ)}\right)^{2} $$

$$\rightarrow \tan(\frac{α}{2})=\frac{2-2\cos(θ)-\sin(θ)}{1-\cos(θ)}=t \cdots \left(3\right)$$

* AE/ECを調べます。

$$\frac{AE}{EC}=\sqrt{\frac{AE^{2}}{EC^{2}}}=\sqrt{\frac{\left(a\cos(θ)\right)^{2}+\left(a-a\sin(θ)\right)^{2}}{2a^{2}\left(1-\cos(θ)\right)}}=\sqrt{\frac{1-\sin(θ)}{1-\cos(θ)}}=\sqrt{\frac{2-2\cos(θ)-\sin(θ)-1+2\cos(θ)}{1-\cos(θ)}}$$

$$=\sqrt{t-\frac{1-2\cos(θ)}{1-\cos(θ)}}=\sqrt{t-\frac{\left(2-2\cos(θ)\right)-1}{1-\cos(θ)}}=\sqrt{t-2+\frac{1}{1-\cos(θ)}}$$

ここで(3)を変形します。

$$\frac{2-2\cos(θ)-\sin(θ)}{1-\cos(θ)}=t \rightarrow t\left(1-\cos(θ)\right)- 2\left(1-\cos(θ)\right)=-\sin(θ) $$

$$\rightarrow \left(t-2\right)\left(1-\cos(θ)\right)=-\sqrt{1-cos^{2}θ} \rightarrow \left(t-2\right)^{2}\left(1-\cos(θ)\right)^{2}=1-cos^{2}θ=\left(1-\cos(θ)\right) \left(1+\cos(θ)\right) $$

$$\rightarrow \left(t-2\right)^{2}\left(1-\cos(θ)\right)^{2}=-\left(1-\cos(θ)\right) \left(1-\cos(θ)-2\right) $$

$$\rightarrow \left(t-2\right)^{2}\left(1-\cos(θ)\right)^{2}=-\left(1-\cos(θ)\right)^{2}+2 \left(1-\cos(θ)\right) $$

$$\rightarrow \left(t^{2}-4t+5\right)\left(1-\cos(θ)\right)^{2}-2\left(1-\cos(θ)\right)=0 $$

$$\rightarrow \left(1-\cos(θ)\right)×\left\{\left(t^{2}-4t+5\right)\left(1-\cos(θ)\right)-2\right\}=0 $$

$1-\cos(θ)\ne 0$ とすると、

$$1-\cos(θ)=\frac{2}{t^{2}-4t+5} \rightarrow \frac{1}{1-\cos(θ)}=\frac{t^{2}-4t+5}{2}$$

ゆえに、αが45度までのとき、

$$\frac{AE}{EC}=\sqrt{t-2+\frac{1}{1-\cos(θ)}}=\sqrt{t-2+\frac{t^{2}-4t+5}{2}}=\sqrt{\frac{t^{2}-2t+1}{2}}=\sqrt{\frac{\left(t-1\right)^{2}}{2}}=\frac{1-t}{\sqrt{2}}$$



［2］

$$CE=\sqrt{\left(a-a\cos(θ)\right)^{2}+\left(a\sin(θ)\right)^{2}}=\sqrt{2a^{2}\left(1-\cos(θ)\right)}=a$$

$$\sqrt{2×\frac{2}{t^{2}-4t+5}}=\frac{2a}{\sqrt{t^{2}-4t+5}}$$

$$AE=\sqrt{\left(a\cos(θ)\right)^{2}+\left(a-a\sin(θ)\right)^{2}}=\sqrt{2a^{2}\left(1-\sin(θ)\right)}$$

(3)を変形すると、

$$\frac{2-2\cos(θ)-\sin(θ)}{1-\cos(θ)}=t \rightarrow \left(2-t\right)\cos(θ)=2-t-\sin(θ) \rightarrow \left(2-t\right)\sqrt{1-sin^{2}θ}=\left(1-\sin(θ)\right)+\left(1-t\right) $$

$$\rightarrow \left(2-t\right)^{2}\left(1-sin^{2}θ\right)=\left(1-\sin(θ)\right)^{2}+2\left(1-t\right)\left(1-\sin(θ)\right)+\left(1-t\right)^{2} \cdots \left(4\right)$$

ここで、

$1-sin^{2}θ=\left(1-\sin(θ)\right)\left(1+\sin(θ)\right)=-\left(1-\sin(θ)\right)\left(1-\sin(θ)-2\right)=-\left(1-\sin(θ)\right)^{2}+2\left(1-\sin(θ)\right)$

なので、

(4)は、

$$\rightarrow \left(2-t\right)^{2}\left\{-\left(1-\sin(θ)\right)^{2}+2\left(1-\sin(θ)\right)\right\}=\left(1-\sin(θ)\right)^{2}+2\left(1-t\right)\left(1-\sin(θ)\right)+\left(1-t\right)^{2} $$

$$\rightarrow \left(t^{2}-4t+5\right)\left(1-\sin(θ)\right)^{2}-2\left(t^{2}-3t+3\right)\left(1-\sin(θ)\right)+\left(t^{2}-2t+1\right)=0 $$

$$\rightarrow \left(1-\sin(θ)\right)=\frac{t^{2}-3t+3\pm \sqrt{\left(t^{2}-3t+3\right)^{2}-\left(t^{2}-4t+5\right)\left(t^{2}-2t+1\right)}}{t^{2}-4t+5}=\frac{t^{2}-3t+3\pm \left(2-t\right)}{t^{2}-4t+5}$$

$$=\frac{t^{2}-4t+5}{t^{2}-4t+5}, \frac{t^{2}-2t+1}{t^{2}-4t+5}$$

ここで、復号が「＋」のときは、定数になってしまうので、「－」のときが適当です。

よって、

$$AE=\sqrt{2a^{2}\left(1-\sin(θ)\right)}=\sqrt{2a^{2}×\frac{t^{2}-2t+1}{t^{2}-4t+5}}=\frac{\sqrt{2}a\left(1-t\right)}{\sqrt{t^{2}-4t+5}}$$

問題2

* 図のように座標軸をとります。

扇形の半径をｒとします。

円の方程式は、$x^{2}+y^{2}=r^{2}$ です。

各点の座標は、

$$A\left(r,0\right), E\left(r-\frac{1}{2},0\right), F\left(\frac{r-1}{2},0\right)$$

$$C\left(r-\frac{1}{2},\sqrt{r-\frac{1}{4}}\right), B\left(\frac{r-1}{2},\frac{\sqrt{3r^{2}+2r-1}}{2}\right)$$



* CAの長さが2なので、

$$CA^{2}=EA^{2}+CE^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\sqrt{r-\frac{1}{4}}\right)^{2}=r=4$$

点B、Cの座標を調べると、

$$C\left(r-\frac{1}{2},\sqrt{r-\frac{1}{4}}\right)=\left(4-\frac{1}{2},\sqrt{4-\frac{1}{4}}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$B\left(\frac{r-1}{2},\frac{\sqrt{3r^{2}+2r-1}}{2}\right)=\left(\frac{4-1}{2},\frac{\sqrt{3×16+2×4-1}}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$$

BCの長さを求めると、

$$BC=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)^{2}+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac{\sqrt{55}}{2}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{43-5\sqrt{33}}{2}}=\sqrt{\frac{86-2\sqrt{825}}{4}}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$$