● 問題 452 解答＜三角定規＞

[問題]　$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ …①　(a, b, c, d : 自然数, $a\leqq b\leqq c\leqq d$)

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ だから，明らかに $a\geqq 2$, $b\geqq 3$。

(1) $a=2$, $b=3$ のとき

①より，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{6}$ …②　∴ $d=\dfrac{6c}{c-6}$ …③

$d>0$ 及び③より　$c-6>0$　∴ $c\geqq 7$

$c\leqq d$ 及び②より　$\dfrac{2}{c}\geqq\dfrac{1}{6}$　∴ $c\leqq 12$　∴ $7\leqq c\leqq 12$

よって，②③を満たす c, d は，$(c, d)=(7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), (12, 12)$

(2) $a=2$, $b=4$ のとき

①より，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{4}$ …④　∴ $d=\dfrac{4c}{c-4}$ …⑤

$d>0$ 及び⑤より　$c-4>0$　∴ $c\geqq 5$

$c\leqq d$ 及び④より　$\dfrac{2}{c}\geqq\dfrac{1}{4}$　∴ $c\leqq 8$　∴ $5\leqq c\leqq 8$

よって，④⑤を満たす c, d は，$(c, d)=(5, 20), (6, 12), (8, 8)$

(3) $a=2$, $b=5$ のとき

①より，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{3}{10}$ …⑥　∴ $d=\dfrac{10c}{3c-10}$ …⑦

$c=5$ のとき，⑦より　$d=10$。

$c=6$ のとき，⑦より　$d=\dfrac{60}{8}=\dfrac{15}{2}$ ← 不適

$c\geqq 7$ のとき，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\leqq\dfrac{2}{7}<\dfrac{3}{10}$ で⑥を満たさない。

(4) $a=2$, $b=6$ のとき

$c=d=6$ のときの，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=1$　が①を満たすが，$6<c\leqq d$ は①を満たさない。

(5) $a=3$, $b=3$ のとき

①より，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{3}$ …⑧　∴ $d=\dfrac{3c}{c-3}$ …⑨　$c=4$, $d=12$ はこれを満たす。

また，$c=d=6$ は⑧を満たし，$7\leqq c\leqq d$ は　$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\leqq\dfrac{2}{7}<\dfrac{1}{3}$ で⑧を満たさない。

(6) $a=3$, $b=4$ のとき

①より，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{5}{12}$ …⑩　∴ $d=\dfrac{12c}{5c-12}$ …⑪　$c=4$, $d=6$ はこれを満たす。

また $5\leqq c\leqq d$ は，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\leqq\dfrac{2}{5}<\dfrac{5}{12}$ で⑩を満たさない。

(7) $a=3$, $5\leqq b\leqq c\leqq d$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\leqq\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{14}{15}<1$ で①を満たさない。

(8) $a=4$ のとき　①を満たすのは，明らかに $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=1$ のみ。

以上より，①の自然数解は

$(a, b, c, d)=$**(2, 3, 7, 42), (2, 3, 8, 24), (2, 3, 9, 18), (2, 3, 10, 15), (2, 3, 12, 12),**
(2, 4, 5, 20), (2, 4, 6, 12), (2, 4, 8, 8),
(2, 5, 5, 10), (2, 6, 6, 6),
(3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6), (4, 4, 4, 4)
の **14 組**　…[答]

[余力問題]　$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}$　$(a, b, c, d, e$：自然数，$a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e)$

エクセルでマクロを組み求めました（下表）。解の総数は 147 組で，a, b, c, d, e がすべて異なるものが 72 組，等しいものを含むもの（No.が黄色）が 75 組でした。

No.	a	b	c	d	e
1	2	3	7	43	1806
2	2	3	7	44	924
3	2	3	7	45	630
4	2	3	7	46	483
5	2	3	7	48	336
6	2	3	7	49	294
7	2	3	7	51	238
8	2	3	7	54	189
9	2	3	7	56	168
10	2	3	7	60	140
11	2	3	7	63	126
12	2	3	7	70	105
13	2	3	7	78	91
14	2	3	7	84	84
15	2	3	8	25	600
16	2	3	8	26	312
17	2	3	8	27	216
18	2	3	8	28	168
19	2	3	8	30	120
20	2	3	8	32	96
21	2	3	8	33	88
22	2	3	8	36	72
23	2	3	8	40	60
24	2	3	8	42	56
25	2	3	8	48	48
26	2	3	9	19	342
27	2	3	9	20	180
28	2	3	9	21	126
29	2	3	9	22	99
30	2	3	9	24	72
31	2	3	9	27	54
32	2	3	9	30	45
33	2	3	9	36	36
34	2	3	10	16	240
35	2	3	10	18	90
36	2	3	10	20	60
37	2	3	10	24	40
38	2	3	10	30	30
39	2	3	11	14	231
40	2	3	11	15	110

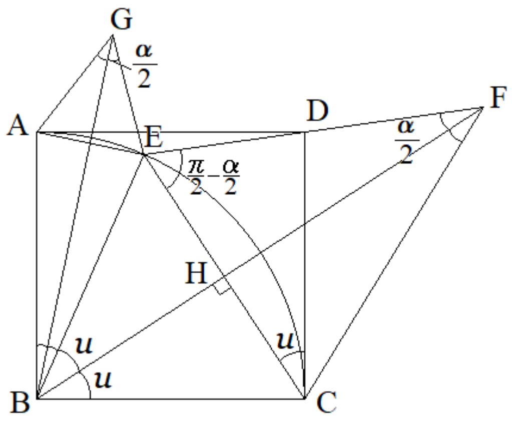
No.	a	b	c	d	e
41	2	3	11	22	33
42	2	3	12	13	156
43	2	3	12	14	84
44	2	3	12	15	60
45	2	3	12	16	48
46	2	3	12	18	36
47	2	3	12	20	30
48	2	3	12	21	28
49	2	3	12	24	24
50	2	3	13	13	78
51	2	3	14	14	42
52	2	3	14	15	35
53	2	3	14	21	21
54	2	3	15	15	30
55	2	3	15	20	20
56	2	3	16	16	24
57	2	3	18	18	18
58	2	4	5	21	420
59	2	4	5	22	220
60	2	4	5	24	120
61	2	4	5	25	100
62	2	4	5	28	70
63	2	4	5	30	60
64	2	4	5	36	45
65	2	4	5	40	40
66	2	4	6	13	156
67	2	4	6	14	84
68	2	4	6	15	60
69	2	4	6	16	48
70	2	4	6	18	36
71	2	4	6	20	30
72	2	4	6	21	28
73	2	4	6	24	24
74	2	4	7	10	140
75	2	4	7	12	42
76	2	4	7	14	28
77	2	4	8	9	72
78	2	4	8	10	40
79	2	4	8	12	24
80	2	4	8	16	16

No.	a	b	c	d	e
81	2	4	9	9	36
82	2	4	9	12	18
83	2	4	10	10	20
84	2	4	10	12	15
85	2	4	12	12	12
86	2	5	5	11	110
87	2	5	5	12	60
88	2	5	5	14	35
89	2	5	5	15	30
90	2	5	5	20	20
91	2	5	6	8	120
92	2	5	6	9	45
93	2	5	6	10	30
94	2	5	6	12	20
95	2	5	6	15	15
96	2	5	7	7	70
97	2	5	8	8	20
98	2	5	10	10	10
99	2	6	6	7	42
100	2	6	6	8	24
101	2	6	6	9	18
102	2	6	6	10	15
103	2	6	6	12	12
104	2	6	7	7	21
105	2	6	8	8	12
106	2	6	9	9	9
107	2	7	7	7	14
108	2	8	8	8	8
109	3	3	4	13	156
110	3	3	4	14	84
111	3	3	4	15	60
112	3	3	4	16	48
113	3	3	4	18	36
114	3	3	4	20	30
115	3	3	4	21	28
116	3	3	4	24	24
117	3	3	5	8	120
118	3	3	5	9	45
119	3	3	5	10	30
120	3	3	5	12	20

No.	a	b	c	d	e
121	3	3	5	15	15
122	3	3	6	7	42
123	3	3	6	8	24
124	3	3	6	9	18
125	3	3	6	10	15
126	3	3	6	12	12
127	3	3	7	7	21
128	3	3	8	8	12
129	3	3	9	9	9
130	3	4	4	7	42
131	3	4	4	8	24
132	3	4	4	9	18
133	3	4	4	10	15
134	3	4	4	12	12
135	3	4	5	5	60
136	3	4	5	6	20
137	3	4	6	6	12
138	3	4	6	8	8
139	3	5	5	5	15
140	3	5	5	6	10
141	3	6	6	6	6
142	4	4	4	5	20
143	4	4	4	6	12
144	4	4	4	8	8
145	4	4	5	5	10
146	4	4	6	6	6
147	5	5	5	5	5

《追加問題》

［問題１］(1)　図のように点 H 及び角度を定める。



$\angle DCE = u,\ \angle CEF = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$　である。

正方形の 1 辺を 1 とすると　E$(\cos 2u,\ \sin 2u)$ であるから

$$ED^2 = (1-\cos 2u)^2 + (1-\sin 2u)^2 = 3 - 2(\cos 2u + \sin 2u)$$
$$= 4\sin^2 u - 4\sin u\cos u + 1$$

△CDE に正弦定理を適用し，$\dfrac{ED}{\sin u} = \dfrac{CD}{\sin(\pi/2-\alpha/2)}$

$$\therefore\ \frac{4\sin^2 u - 4\sin u\cos u + 1}{\sin^2 u} = \frac{1}{\cos^2(\alpha/2)} = 1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore\ 4 - \frac{4\cos u}{\sin u} + \frac{1}{\sin^2 u} = 4 - \frac{4}{\tan u} + 1 + \frac{1}{\tan^2 u} = 1 + t^2 \qquad \therefore\ \left(2 - \frac{1}{\tan u}\right)^2 = t^2$$

明らかに $u \leqq \dfrac{\pi}{4}$　だから　$\dfrac{1}{\tan u} \geqq 1$。　$\therefore\ 2 - \dfrac{1}{\tan u} = t,\ \dfrac{1}{\tan u} = 2 - t$

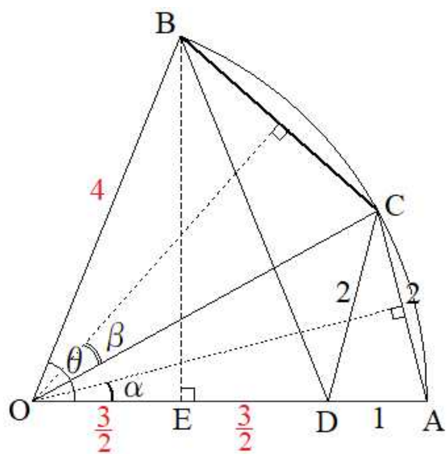
$$CE = 2\sin u,\ AE = 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2u\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = \sqrt{2}\,(\cos u - \sin u)$$

$$\therefore\ \frac{AE}{CE} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\tan u} - 1\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)}\ \cdots[答]$$

(2)　$\dfrac{1}{\sin^2 u} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2 u} = 1 + (2-t)^2 = t^2 - 4t + 5$　$\therefore\ \sin u = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 4u + 5}}$

以上より，　$CE = 2a\sin u = \boldsymbol{\dfrac{2a}{\sqrt{t^2-4t+5}}}$，　$AE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-t)\cdot CE = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}\,a(1-t)}{\sqrt{t^2-4t+5}}}$　$\cdots$[答]

［問題２］ 図において，



△ OAC ∽△ CAD（底角を共有する二等辺三角形）だから，

OA : AC＝CA : AD＝2 : 1　　$\therefore$　$OA = 4,\ OD = 3,\ OE = \dfrac{3}{2}$

図のように角 α，β，θ を定める。

$$\cos\theta = \frac{3}{8},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{55}}{8},\ \sin\alpha = \frac{1}{4},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8},\ \cos 2\alpha = \frac{7}{8}$$

$$\cos 2\beta = \cos(\theta - 2\alpha) = \cos\theta\cos 2\alpha + \sin\theta\sin 2\alpha$$
$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{55}}{8}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{21 + 5\sqrt{33}}{64}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{2}} = \sqrt{\frac{43 - 5\sqrt{33}}{128}} = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{11}}{16}$$

$$\therefore\ BC = 2\cdot 4\sin\beta = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2}}\quad (=2.671\cdots)\ \cdots[答]$$