

(1) (Pell方程式) $x^2 = 3y^2 + 1$, x, y は負でない整数

与方程式より, $x^2 - 3y^2 = 1 \quad \therefore (x + \sqrt{3}y)(x - \sqrt{3}y) = 1$

$\alpha = x + \sqrt{3}y$, $\beta = x - \sqrt{3}y$ とすると, $\alpha \geq 1$, $0 < \beta \leq 1$, $\beta = \alpha^{-1}$

$G = \{a + \sqrt{3}b \mid a, b \text{ は整数, } a^2 - 3b^2 = 1\}$ とする.

$\alpha = a + \sqrt{3}b$, $\beta = c + \sqrt{3}d \in G$, a, b, c, d は整数のとき,

$a^2 - 3b^2 = c^2 - 3d^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$ であり,

$$\alpha\beta = (a + \sqrt{3}b)(c + \sqrt{3}d) = (ac + 3bd) + \sqrt{3}(ad + bc)$$

$$(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2$$

$$= a^2c^2 + 6abcd + 9b^2d^2 - 3a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2$$

$$= a^2(c^2 - 3d^2) - 3b^2(c^2 - 3d^2) = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2)$$

$$= 1 \cdot 1 = 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \alpha\beta \in G$$

$\alpha \neq 0$, $\alpha^0 = 1 + \sqrt{3} \cdot 0 \in G$ であるから,

n が負でない整数のとき, $\alpha \in G \implies \alpha^n \in G$

$u = 2 + \sqrt{3} \in G$ とするとき,

$u^0 = 1 + \sqrt{3} \cdot 0$, $u^1 = 2 + \sqrt{3}$, $u^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, $\cdots$ であるから,

$(x, y) = (1, 0), (2, 1), (7, 4), \cdots$

次に, $\alpha \in G$, $\alpha > 0$ のとき, $\alpha = u^n$ となる負でない整数 n が存在することを示す.

$\alpha \in G$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq u^n$ (n は負でない整数) と仮定する.

$2 + \sqrt{3}$ は, 与方程式を満たす (x, y) (x, y は正の整数) において, 最小の正の数 $u = x + \sqrt{3}y$ の値 ($u \in G$) である.

数列 $\{u^n\}$ は単調増加数列であり, $\alpha \in G$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq u^n$ より,

$$u^k < \alpha < u^{k+1}$$

となる負でない整数 k が存在する.

$$u^k > 0 \text{ より, } 1 < \alpha u^{-k} < u \cdots \textcircled{2}$$

$$u^{-1} \in G \text{ より, } u^{-k} = (u^{-1})^k \in G$$

$$\therefore \alpha u^{-k} \in G$$

故に②と, x, y が正の数のとき, u が G の最小の要素であることは矛盾する.

$$\therefore \alpha \in G, \alpha > 0 \implies \alpha = u^n \quad (n \text{ は負でない整数})$$

以上により, 与方程式の解 $(x, y) = (x_n, y_n)$ は,

$$x_n + \sqrt{3}y_n = (2 + \sqrt{3})^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \cdots \textcircled{3}$$

を満たすことが分かる.

同様に,

$$x_n - \sqrt{3} y_n = (2 - \sqrt{3})^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \dots \textcircled{4}$$

であることが分かる.

$$(\textcircled{3} + \textcircled{4}) \div 2 \text{ より, } x_n = \frac{1}{2} \{ (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \}$$

$$(\textcircled{3} - \textcircled{4}) \div 2\sqrt{3} \text{ より, } y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \{ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \}$$

$$n = 0 \text{ のとき, } (x, y) = (x_0, y_0) = (1, 0)$$

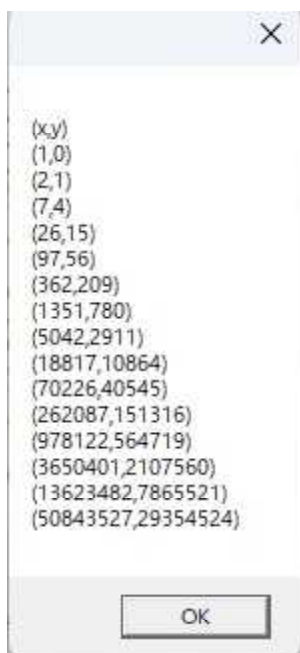
$$n = 1 \text{ のとき, } (x, y) = (x_1, y_1) = (2, 1)$$

$$n = 2 \text{ のとき, } (x, y) = (x_2, y_2) = (7, 4)$$

$$n = 3 \text{ のとき, } (x, y) = (x_3, y_3) = (26, 15)$$

$$n = 4 \text{ のとき, } (x, y) = (x_4, y_4) = (97, 56) \dots$$

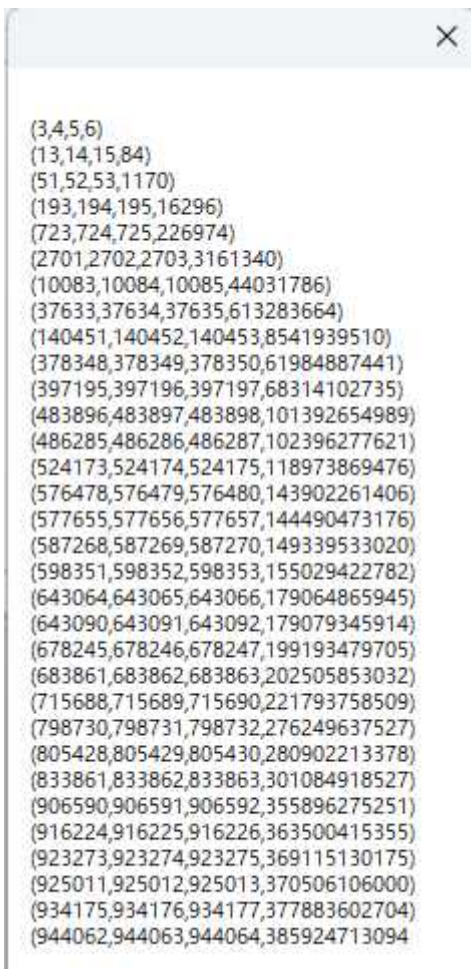
Vbscriptで計算してみると, $x, y \leq 10^8$ の範囲では,



となることが分かる.

(2) 3 辺の長さを a , b , c , 面積を S とする.

Vbscript で計算してみると, a , b , c が $10^8 + 1$ 以下の範囲では,
(a , b , c , S) は,



```
(3,4,5,6)
(13,14,15,84)
(51,52,53,1170)
(193,194,195,16296)
(723,724,725,226974)
(2701,2702,2703,3161340)
(10083,10084,10085,44031786)
(37633,37634,37635,613283664)
(140451,140452,140453,8541939510)
(378348,378349,378350,61984887441)
(397195,397196,397197,68314102735)
(483896,483897,483898,101392654989)
(486285,486286,486287,102396277621)
(524173,524174,524175,118973869476)
(576478,576479,576480,143902261406)
(577655,577656,577657,144490473176)
(587268,587269,587270,149339533020)
(598351,598352,598353,155029422782)
(643064,643065,643066,179064865945)
(643090,643091,643092,179079345914)
(678245,678246,678247,199193479705)
(683861,683862,683863,202505853032)
(715688,715689,715690,221793758509)
(798730,798731,798732,276249637527)
(805428,805429,805430,280902213378)
(833861,833862,833863,301084918527)
(906590,906591,906592,355896275251)
(916224,916225,916226,363500415355)
(923273,923274,923275,369115130175)
(925011,925012,925013,370506106000)
(934175,934176,934177,377883602704)
(944062,944063,944064,385924713094)
```

であることが分かる.