第 453 回

問題 1　方程式：$x^2=3y^2+1$ はペル方程式の 1 つです。
この方程式の負でない整数解 $(x,\ y)$ の特殊解または，一般解を求めてください。

ペル方程式の性質
ペル方程式 $x^2-Dy^2=1$ （D は 2 以上の平方因子を含まない整数）　…①
の自然数解 $(x,\ y)$ について，
(1)　①の解のうち x の値が最小である解を $(x_1,\ y_1)$ とおくとき，次の②のように自然数 x_n，y_n （$n=2,\ 3,\ \cdots$ ）を定めると，$(x_n,\ y_n)$ もまた方程式①の解である。

$$x_n+y_n\sqrt{D}=(x_1+y_1\sqrt{D})^n \quad \cdots②$$

(2)　ペル方程式の解はすべて (1) によって得られる。

証明は省略。→ 証明は「ペル方程式とは - 数学の力」（右のQRコード）の PDF にあります。

解答

ペル方程式の性質により，$x_n\pm y_n\sqrt{D}=(x_1\pm y_1\sqrt{D})^n$ （複号同順）が成り立ち，

$$x_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{D})^n+(x_1-y_1\sqrt{D})^n}{2},\quad y_n=\frac{(x_1+y_1\sqrt{D})^n-(x_1-y_1\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}$$

が成り立つ。

$D=3$ のとき，$x^2-3y^2=1$ を満たす最小の自然数解は，$(x,\ y)=(2,\ 1)$ であるから，

$$(x_n,\ y_n)=\left(\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2},\ \frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}\right)$$

なお，$n=0$ とおくと，$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$ となり，この問題の場合，これも解としてよい。

よって，一般解は，$(x_n,\ y_n)=\left(\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2},\ \dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}\right)$ （$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ ）　答

次に，$n=2$ のとき，$(x_2,\ y_2)=\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{7+4\sqrt{3}-(7-4\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)=(7,\ 4)$

3 以上の n の値に対して，$(x_n,\ y_n)$ を計算するために漸化式をつくる。

一般に，

$(x_1\pm y_1\sqrt{D})^2-2x_1(x_1\pm y_1\sqrt{D})=-({x_1}^2-D{y_1}^2)=-1$ （複号同順）が成り立つので，

$(x_1\pm y_1\sqrt{D})^{n+2}=2x_1(x_1\pm y_1\sqrt{D})^{n+1}-({x_1}^2-D{y_1}^2)^n$ （複号同順）が成り立つ。

したがって，$(x_{n+2},\ y_{n+2})=2x_1(x_{n+1},\ y_{n+1})-(x_n,\ y_n)$

よって，$D=3$，$x_1=2$ のときは，漸化式 $(x_{n+2},\ y_{n+2})=4(x_{n+1},\ y_{n+1})-(x_n,\ y_n)$ が得られる。

これを利用すると，$(x_3,\ y_3)=4(7,\ 4)-(2,\ 1)=(26,\ 15)$

$n=4$ 以降の解は，$(97,\ 56)$，$(362,\ 209)$，$(1351,\ 780)$，$(5042,\ 2911)$，$(18817,\ 10864)$，$(70226,\ 40545)$，$(262087,\ 151316)$，…

補足　$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ も成り立つ。

問題２　３辺の長さが3, 4, 5の三角形の面積は6です。このような３辺の長さが連続する３つの自然数で、ヘロンの三角形を幾つか求めてください。

解答　三角形の３辺の長さを $a=k-1$, $b=k$, $c=k+1$ （kは３以上の自然数），面積を S とする。

$\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3k}{2}$ であるから，ヘロンの公式から，

$$S=\sqrt{\frac{3k}{2}\left\{\frac{3k}{2}-(k-1)\right\}\left(\frac{3k}{2}-k\right)\left\{\frac{3k}{2}-(k+1)\right\}}=\frac{\sqrt{3k(k+2)k(k-2)}}{4}=\frac{k\sqrt{3(k^2-4)}}{4}$$

$k^2-4=3m^2$ となる偶数 k, m が存在するとき，$S=\dfrac{3}{4}km$ は整数になる。

すなわり，ペル方程式 $x^2-3y^2=1$ の解 $(x,\ y)=(x_n,\ y_n)$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）に対して，$k=2x_n$，$m=2y_n$ とすると，$S=3x_ny_n$ （整数）となる。したがって，３辺の長さと面積の組

$(a,\ b,\ c,\ S)=(2x_n-1,\ 2x_n,\ 2x_n+1,\ 3x_ny_n)$

が得られる。

問題１より，$(x,\ y)=(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$，$(7,\ 4)$，$(26,\ 15)$，$(97,\ 56)$，$(362,\ 209)$，$(1351,\ 780)$，$(5042,\ 2911)$，$(18817,\ 10864)$，$(70226,\ 40545)$，$(262087,\ 151316)$，…で，$a\geqq 2$ であるから，

$(a,\ b,\ c,\ S)=(3,\ 4,\ 5,\ 6)$，$(13,\ 14,\ 15,\ 84)$，$(51,\ 52,\ 53,\ 1170)$，$(193,\ 194,\ 195,\ 16296)$，
$(723,\ 724,\ 725,\ 226974)$，$(2701,\ 2702,\ 2703,\ 3161340)$，$(10083,\ 10084,\ 10085,\ 44031786)$，
$(37633,\ 37634,\ 37635,\ 613283664)$，$(140451,\ 140452,\ 140453,\ 8541939510)$，
$(524173,\ 524174,\ 524175,\ 118973869476)$，…　答

補足

(1)　真ん中の辺の長さについて，４倍して１つ前の辺の長さを引けば，次の辺の長さになる。

$14\times4-4=52$，$52\times4-14=194$，…

（∵）問題１の漸化式から，$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n$ となるから。

(2)　面積を14倍して前の面積を引けば，次の面積になる。

$84\times14-6=1170$，$1170\times14-84=16296$，…

（∵）問題１の補足より，$\begin{pmatrix}x_{n+2}\\y_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&12\\4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned}S_{n+2}-14S_{n+1}+S_n&=3(x_{n+2}y_{n+2}-14x_{n+1}y_{n+1}+x_ny_n)\\&=3\{(7x_n+12y_n)(4x_n+7y_n)-14(2x_n+3y_n)(x_n+2y_n)+x_ny_n\}=0\end{aligned}$$

となるから。

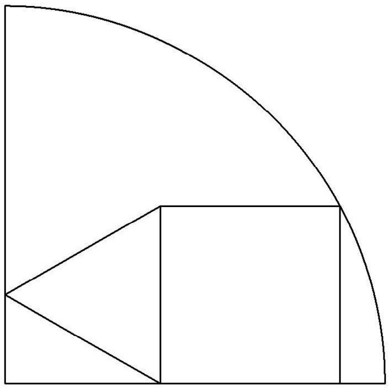
【参考文献】

楽しむ初等数学　松田康雄著　九州大学出版会　2022年

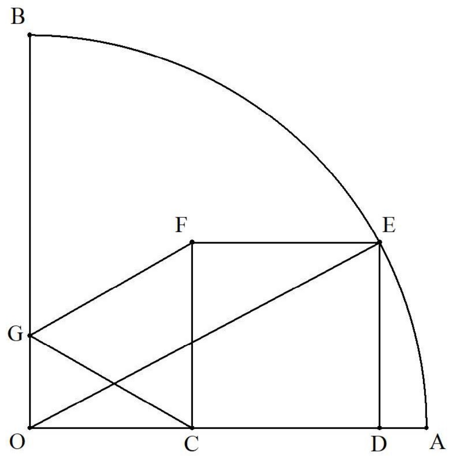
追加問題１

半径１の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。

１辺の長さを求めよ。



解答　１辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。



△EOD について，$\mathrm{OD}=\mathrm{OC}+\mathrm{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+a=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}a$，$\mathrm{DE}=a$，

$\mathrm{EO}=1$ であるから，三平方の定理により，$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}a\right)^2+a^2=1^2$

$$a^2=\frac{1}{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}=\frac{4}{11+4\sqrt{3}}=\frac{4(11-4\sqrt{3})}{73}$$

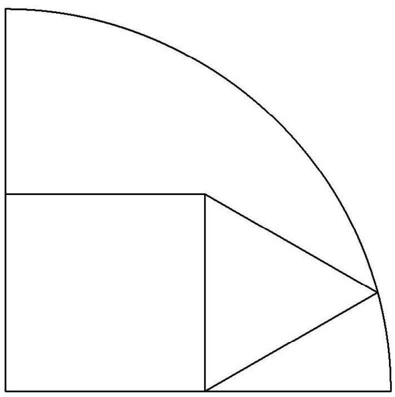
$a>0$ より，$a=2\sqrt{\dfrac{11-4\sqrt{3}}{73}}$　（≒ 0.472347）

よって，求める１辺の長さは，$2\sqrt{\dfrac{11-4\sqrt{3}}{73}}$　答

追加問題２

半径１の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。

１辺の長さを求めよ。



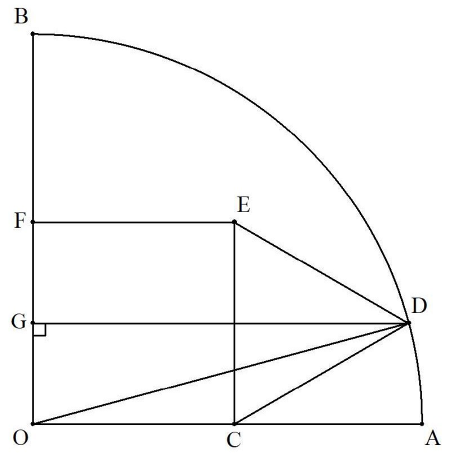
解答　1辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。

△ODGについて，OD＝1，$DG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+a=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}a$，$GO=\dfrac{a}{2}$ であるから，三平方の定理により，$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=1^2$

$$a^2=\frac{1}{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$a>0$ より，$a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ （$\fallingdotseq 0.517638$）

よって，求める1辺の長さは，$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 　答



（2025/3/30　ジョーカー）