.453　よふかしのつらいおじさん

問題1

$$x^{2}=3y^{2}+1$$

* 右辺の定数が1なので、$\left(1,0\right)$ は解です。

これは、ｙの項の係数によりません。

* ｙの値を0から1ずつ増やすことを考えます。

平方数に注目して、



$$\left(2,1\right), \left(7,4\right), \cdots $$

などが解だとわかります。

* ｙの値を1ずつ増やしていく方法は大変です。

そこで、ペルの方程式の性質を使います。

計算の都合で、次の形で考えます。

$x^{2}-Dy^{2}=1 \left(D:自然数\right)$

ｘとｙがともに自然数解で、ｘが最小のものを$\left(a,b\right)$ とすると、

$\left(a+b\sqrt{D}\right)^{n}=A\_{n}+B\_{n}\sqrt{D}$ の$A\_{n}, B\_{n}$ も解です。

帰納法で確認します。

・$n=1$ のとき、$A\_{1}=a, B\_{1}=b$ です。

$a^{2}-Db^{2} =1$ なので、成立します。

・$n=k$ のとき、成立すると仮定すると、

　$\left(a+b\sqrt{D}\right)^{k}=A\_{k}+B\_{k}\sqrt{D}$ として、$A\_{k}^{2}-DB\_{k}^{2}=1$ です。

　$n=k+1$ のとき、

　$\left(a+b\sqrt{D}\right)^{k+1}=\left(A\_{k}+B\_{k}\sqrt{D}\right)\left(a+b\sqrt{D}\right)=\left(A\_{k}a+B\_{k}bD\right)+\left(A\_{k}b+B\_{k}a\right)\sqrt{D}$ なので、

　$A\_{k+1}=A\_{k}a+B\_{k}bD, B\_{k+1}=A\_{k}b+B\_{k}a$ です。

　よって、

　$A\_{k+1}^{2}-DB\_{k+1}^{2}=\left(A\_{k}a+B\_{k}bD\right)^{2}-D\left(A\_{k}b+B\_{k}a\right)^{2}$

　$=\left(A\_{k}^{2}a^{2}+2A\_{k}B\_{k}abD+B\_{k}^{2}b^{2}D^{2}\right)-D\left(A\_{k}^{2}b^{2}+2A\_{k}B\_{k}ab+B\_{k}^{2}a^{2}\right)$

　$=A\_{k}^{2}\left(a^{2}-Db^{2}\right)-DB\_{k}^{2}\left(a^{2}-Db^{2}\right)=\left(A\_{k}^{2}-DB\_{k}^{2}\right)\left(a^{2}-Db^{2}\right)=1$

　より、成立します。

* 具体的に、$a=2, b=1$ として、

$$\left(2+1\sqrt{3}\right)^{1}=2+1\sqrt{3} \rightarrow \left(2,1\right)$$

$$\left(2+1\sqrt{3}\right)^{2}=\left(2+1\sqrt{3}\right)\left(2+1\sqrt{3}\right)=7+4\sqrt{3} \rightarrow \left(7,4\right)$$

$$\left(2+1\sqrt{3}\right)^{3}=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(2+1\sqrt{3}\right)=26+15\sqrt{3} \rightarrow \left(26,15\right)$$

$$\left(2+1\sqrt{3}\right)^{4}=\left(26+15\sqrt{3}\right)\left(2+1\sqrt{3}\right)=97+56\sqrt{3} \rightarrow \left(97,56\right)$$

$$\left(2+1\sqrt{3}\right)^{5}=\left(97+56\sqrt{3}\right)\left(2+1\sqrt{3}\right)=362+209\sqrt{3} \rightarrow \left(362,209\right)$$

･･･

まとめると、

指数が偶数のとき、

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n}=\sum\_{k=0}^{n} \_{2n}C\_{2k}\left(4^{n-k}×3^{k}\right)+\sqrt{3}\sum\_{k=0}^{n-1} \_{2n}C\_{2k+1}\left(2^{2n-2k-1}×3^{k}\right) $$

$$\rightarrow \left(\sum\_{k=0}^{n} \_{2n}C\_{2k}\left(4^{n-k}×3^{k}\right),\sum\_{k=0}^{n-1} \_{2n}C\_{2k+1}\left(2^{2n-2k-1}×3^{k}\right)\right)$$

指数が奇数のとき、

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1}=\sum\_{k=0}^{n} \_{2n+1}C\_{2k}\left(2∙4^{n-k}×3^{k}\right)+\sqrt{3}\sum\_{k=0}^{n} \_{2n+1}C\_{2k+1}\left(4^{n-k}×3^{k}\right) $$

$$\rightarrow \left(\sum\_{k=0}^{n} \_{2n+1}C\_{2k}\left(2∙4^{n-k}×3^{k}\right),\sum\_{k=0}^{n} \_{2n+1}C\_{2k+1}\left(4^{n-k}×3^{k}\right)\right)$$

問題2

3辺の長さを、ｎ－1、ｎ、ｎ＋1とします。

ヘロンの公式で3角形の面積はＳ、

$$S=\sqrt{\frac{n-1+n+n+1}{2}×\frac{-n+1+n+n+1}{2}×\frac{n-1-n+n+1}{2}×\frac{n-1+n-n-1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3n}{2}×\frac{n+2}{2}×\frac{n}{2}×\frac{n-2}{2}}$$

ここでｎが奇数とすると、分子のすべてが奇数となり分数は自然数になりません。

よってｎは偶数です。

ｎ＝2ｘとおきます。

$$S=\sqrt{\frac{3n}{2}×\frac{n+2}{2}×\frac{n}{2}×\frac{n-2}{2}}==\sqrt{\frac{3∙2x}{2}×\frac{2x+2}{2}×\frac{2x}{2}×\frac{2x-2}{2}}=\sqrt{3x\left(x+1\right)x\left(x-1\right)}$$

$$=\sqrt{3x^{2}\left(x^{2}-1\right)} \cdots \left(1\right)$$

ここで、式(1)が自然数になるには、$x^{2}-1$ が $3y^{2}$ という形である必要があります。

よって、$x^{2}-1=3y^{2} \rightarrow x^{2}-3y^{2}=1$ となり、ペル方程式になります。

問題1よりいくつかの解は、(2,1)、(7,4)、(26,15)、(97,56)、(362,209)、･･･です。

よって、ｎ＝4、14、52、194、724、･･･です。

まとめると次のようになります。



追加問題1

1辺の長さをｘとします。

直角三角形OAHに三平方の定理を用いると、

$$OA^{2}=\left(OS+SH\right)^{2}+AH^{2} \rightarrow 1^{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\right)^{2}+x^{2} \rightarrow 1=\left(\frac{11}{4}+\sqrt{3}\right)x^{2} $$

$$\rightarrow x^{2}=\frac{1}{\frac{11+4\sqrt{3}}{4}}=\frac{4}{11+4\sqrt{3}}×\frac{11-4\sqrt{3}}{11-4\sqrt{3}}=\frac{4×\left(11-4\sqrt{3}\right)}{73} $$

$$\rightarrow x=2\sqrt{\frac{11-4\sqrt{3}}{73}}=\frac{2}{73}\sqrt{803-292\sqrt{3}}$$



問題2

1辺の長さをｘとします。

直角三角形OAHに三平方の定理を用いると、

$$OA^{2}=\left(OS+SH\right)^{2}+AH^{2} \rightarrow 1^{2}=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}x\right)^{2} \rightarrow 1=\left(2+\sqrt{3}\right)x^{2} $$

$$\rightarrow x^{2}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}×\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3} $$

$$\rightarrow x=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

