.453　よふかしのつらいおじさん

問題1

* 右辺の定数が1なので、 は解です。

これは、ｙの項の係数によりません。

* ｙの値を0から1ずつ増やすことを考えます。

平方数に注目して、



などが解だとわかります。

* ｙの値を1ずつ増やしていく方法は大変です。

そこで、ペルの方程式の性質を使います。

計算の都合で、次の形で考えます。

ｘとｙがともに自然数解で、ｘが最小のものを とすると、

の も解です。

帰納法で確認します。

・ のとき、 です。

なので、成立します。

・ のとき、成立すると仮定すると、

として、 です。

　 のとき、

　 なので、

　 です。

　よって、

　より、成立します。

* 具体的に、 として、

･･･

まとめると、

指数が偶数のとき、

指数が奇数のとき、

問題2

3辺の長さを、ｎ－1、ｎ、ｎ＋1とします。

ヘロンの公式で3角形の面積はＳ、

ここでｎが奇数とすると、分子のすべてが奇数となり分数は自然数になりません。

よってｎは偶数です。

ｎ＝2ｘとおきます。

ここで、式(1)が自然数になるには、 が という形である必要があります。

よって、 となり、ペル方程式になります。

問題1よりいくつかの解は、(2,1)、(7,4)、(26,15)、(97,56)、(362,209)、･･･です。

よって、ｎ＝4、14、52、194、724、･･･です。

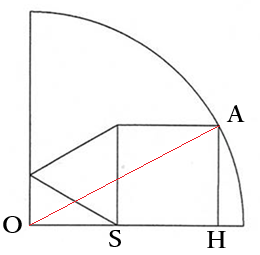
まとめると次のようになります。



追加問題1

1辺の長さをｘとします。

直角三角形OAHに三平方の定理を用いると、



問題2

1辺の長さをｘとします。

直角三角形OAHに三平方の定理を用いると、

