● 問題 453 解答＜三角定規＞

［問題１］

$x^2-3y^2=1$ …①

目視により $(x,\ y)=(2,\ 1)$ は与式①を満たす。← 特殊解

$x_n,\ y_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ を次の②，③で定める。

$$x_n=\frac{1}{2}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right\} \quad \cdots②$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right\} \quad \cdots③$$

$(x, y)=(x_n,\ y_n)$ が①を満たすことを示す。

②③より，

$$x_n+\sqrt{3}\,y_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n \quad \cdots④$$

$$x_n-\sqrt{3}\,y_n=\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \cdots⑤$$

④⑤辺々掛け合わせ，　$x_n{}^2-3y_n{}^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}^n=1$

よって，$(x, y)=(x_n,\ y_n)$ は①の解である。

$x_n,\ y_n$ が整数であることを示す。②を展開すると，

$$x_n=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}\left(-\sqrt{3}\right)^k\right\}=\sum_{k=0}^{[n/2]}{}_n\mathrm{C}_{2k}2^{n-2k}\cdot 3^k$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}\left(\sqrt{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}\left(-\sqrt{3}\right)^k\right\}=\sum_{k=1}^{[n/2]}{}_n\mathrm{C}_{2k+1}2^{n-2k-1}\cdot 3^{(k-1)/2}$$

以上で $x_n,\ y_n$ が整数であることが示された。

以上より，与式①の特殊解は $(x,\ y)=\mathbf{(\,2,\ 1)}$

一般解は，$n=1,\ 2,\ \cdots$ として

$$\left.\begin{aligned}x_n&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right\}}\\ y_n&=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right\}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots［答］$$

［問題２］

　三角形の 3 辺を $n-1,\ n,\ n+1$ （n：自然数，$n\geqq 3$）とすると，

　　ヘロンの公式より 面積 S は，$S=\dfrac{n}{4}\sqrt{3(n+2)(n-2)}$　…①

　①より，S が自然数のとき，$3(n+2)(n-2)$ が平方数であることが必要で，このとき $n+2$ または $n-2$ が 3 の倍数。

(ｉ) $n+2$ が 3 の倍数のとき

　k を自然数として $n=3k-2$ と置くと，$3(n+2)(n-2)=3^2\cdot k(3k-4)$

　このとき，$k(3k-4)$ が平方数となることが必要だが，

　　$k=2$ のとき，$2(3\cdot 2-4)=2^2$

　　$k=18$ のとき，$18(3\cdot 18-4)=(6\cdot 5)^2$

で満たされ，

　　$k=2$ のとき $n=3\cdot 2-2=4,\ S=\dfrac{4}{4}\cdot 3\cdot 2=6$，三角形の 3 辺は 3，4，5　…②

　　$k=18$ のとき $n=3\cdot 18-2=52,\ S=\dfrac{52}{4}\cdot 3\cdot 6\cdot 5=1170$，三角形の 3 辺は 51，52，53　…③

で，題意も満たされる。

(ⅱ) $n-2$ が 3 の倍数のとき

　k を自然数として $n=3k+2$ と置くと，$3(n+2)(n-2)=3^2\cdot k(3k+4)$

　このとき，$k(3k+4)$ が平方数となることが必要だが，

　　$k=4$ のとき，$4(3\cdot 4+4)=8^2$

　　$k=64$ のとき，$64(3\cdot 64+4)=(8\cdot 14)^2$

で満たされ，

　　$k=4$ のとき $n=3\cdot 4+2=14,\ S=\dfrac{14}{4}\cdot 3\cdot 8=84$，三角形の 3 辺は 13，14，15　…④

　　$k=64$ のとき $n=3\cdot 64+2=194,\ S=\dfrac{194}{4}\cdot 3\cdot 6\cdot 14=16{,}296$，三角形の 3 辺は 193，194，195　…⑤

で，題意も満たされる。

　以上より，②以外のヘロンの三角形の例は

　　$(a,\ b,\ c,\ S)=$ **(13, 14, 15, 84), (51, 52, 53, 1170), (193, 194, 195, 16296)**　…[答]

(以下, エクセルで)

　(ｉ) $k=242,\ n=3k-2=724,\ (a,\ b,\ c)=(723,\ 724,\ 725),\ S=226{,}974$

　(ⅱ) $k=900,\ n=3k+2=2702,\ (a,\ b,\ c)=(2701,\ 2702,\ 2703),\ S=3{,}161{,}340$

等も, 解の例となるようです。

《追加問題》

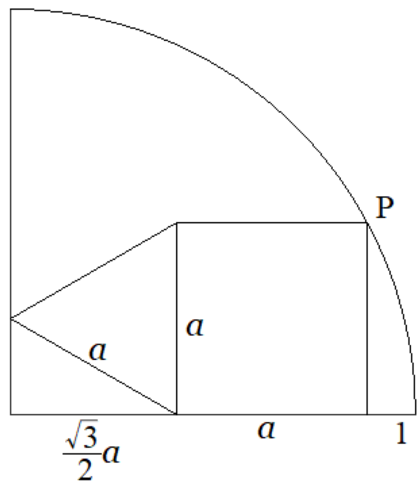
［問題１］ 求める 1 辺の長さを a とすると，

図の P 点が円周上にあることから $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a^2+a^2=1$

∴ $(2+\sqrt{3})^2a^2+4a^2=4$

整理して $a^2=\frac{4}{11+4\sqrt{3}}=\frac{4(11-4\sqrt{3})}{73}$

∴ $a=\frac{2}{73}\sqrt{73(11-4\sqrt{3})}$ (＝0.4723…) …[答]



［問題２］ 求める 1 辺の長さを a とすると，

図の P 点が円周上にあることから $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=1$

∴ $(2+\sqrt{3})^2a^2+a^2=4$

整理して $a^2=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

∴ $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (＝0.5176…) …[答]