４５４．問題１．ｐは素数，ｎは整数

（１） $p=n^2-36n+323=(n-17)(n-19)$

ｐは素数，$n-17$，$n-19$は整数なので，

$n-17=\pm1$　または　$n-19=\pm1$

$\therefore n=16,\ 18,\ 20$

i)．$n=16$のとき，$p=(-1)(-3)=3$

ｐは素数となり，条件に適する．

ii)．$n=18$のとき，$p=1\cdot(-1)=-1$

ｐは素数とならず，条件に反する．

iii)．$n=20$のとき，$p=3\cdot1=3$

ｐは素数となり，条件に適する．

以上より，$(p,\ n)=(3,\ 16),\ (3,\ 20)$

（２） $p=n^3+8=(n+2)(n^2-2n+4)$

ｐは素数，$n+2$，n^2-2n+4は整数で，

$n^2-2n+4=(n-1)^2+3\geqq3$

$\therefore n+2=\pm1$

$\therefore n=-1,\ -3$

i)．$n=-1$のとき，$p=-1+8=7$

ｐは素数となり，条件に適する．

ii)．$n=-3$のとき，$p=-27+8<0$

ｐは素数とならず，条件に反する．

以上より，$(p,\ n)=(7,\ -1)$

（３） $p=n^3-19n-27=(n^3-n)-(18n+27)$

$=(n-1)n(n+1)-3(6n+9)$

$(n-1)n(n+1)$は，連続する３個の整数の積なので，３の倍数である．

$3(6n+9)$も３の倍数なので，ｐは３の倍数である．

ｐは素数なので，$p=n^3-19n-27=3$

$\therefore n^3-19n-30=0$　　　$\therefore(n+2)(n^2-2n-15)=0$

$\therefore(n+2)(n+3)(n-5)=0$　　　$\therefore n=-3,\ -2,\ 5$

以上より，$(p,\ n)=(3,\ -3),\ (3,\ -2),\ (3,\ 5)$

問題２．ｐ，ｑは素数

（１） $p=q^2+2$

i). $q=2$ のとき，$p=2^2+2=6=2\cdot 3$

これは，pが素数であることに反する．

ii). $q=3$ のとき，$p=3^2+2=11$

これは，pが素数であることに適する．

iii). $q\equiv 1 \pmod{3}$，$q\equiv 2 \pmod{3}$ のとき，$q^2\equiv 1 \pmod{3}$

$\therefore p=q^2+2\equiv 0 \pmod{3}$

pは素数なので，$p=3$

$\therefore 3=q^2+2$　　$\therefore q^2=1$　　$\therefore q=\pm 1$

これは，pが素数であることに反する．

以上により，$(p,\ q)=(11,\ 3)$

（2） $p^2=12q+1$　　$\therefore p^2-1=12q$

$\therefore (p+1)(p-1)=2^2\cdot 3q$

$p+1>0$，$p-1>0$ であり，qは素数なので，

$\{p+1,\ p-1\}=\{1,\ 12q\},\ \{2,\ 6q\},\ \{3,\ 4q\},\ \{4,\ 3q\},\ \{6,\ 2q\},\ \{12,\ q\}$

$p\geqq 2$ より，$p+1\geqq 3$，$p-1\geqq 1$

i). $(p+1,\ p-1)=(3,\ 4q)$ のとき，$p=2$，$1=4q$

$$\therefore q=\frac{1}{4}$$

これは，qが素数であることに反する．

ii). $(p+1,\ p-1)=(4,\ 3q)$ のとき，$p=3$，$2=3q$

$$\therefore q=\frac{2}{3}$$

これは，qが素数であることに反する．

iii). $(p+1,\ p-1)=(6,\ 2q)$ のとき，$p=5$，$4=2q$

$\therefore q=2$

これは，p，qが素数であることに適する．

iv). $(p+1,\ p-1)=(12,\ q)$ のとき，$p=11$，$10=q$

これは，qが素数であることに反する．

v). $(p+1,\ p-1)=(q,\ 12)$ のとき，$p=13$，$14=q$

これは，qが素数であることに反する．

vi). $(p+1,\ p-1)=(2q,\ 6)$ のとき，$p=7$，$8=2q$

$\therefore q=4$

これは，qが素数であることに反する．

vii). $(p+1,\ p-1)=(3q,\ 4)$のとき，$p=5$，$6=3q$

$\therefore q=2$

これは，iii).と一致する．

viii). $(p+1,\ p-1)=(4q,\ 3)$のとき，$p=4$

これは，pが素数であることに反する．

ix). $(p+1,\ p-1)=(6q,\ 2)$のとき，$p=3$，$4=6q$

$\therefore q=\dfrac{2}{3}$

これは，qが素数であることに反する．

x). $(p+1,\ p-1)=(12q,\ 1)$のとき，$p=2$，$3=12q$

$\therefore q=\dfrac{1}{4}$

これは，qが素数であることに反する．

以上により，$p=5$，$q=2$

問題３．三角形の３辺をa，b，cとし，

$c^2=a^2+b^2-ab$，a，bは素数、cは整数

i). $a=b$のとき，$c^2=a^2+a^2-a^2=a^2$

$a>0$，$c>0$より，$c=a$

故に△ABCは正三角形である．

ii). $a\neq b$のとき，$a<b$としても一般性は失わない．このとき，

$c^2-a^2=b^2-ab$　　　$\therefore (c+a)(c-a)=b(b-a)\cdots$①

$(c+a)(c-a)=b(b-a)>0$，$c+a>0$より，$c-a>0$

①の両辺は，bの倍数であり，bは素数であるから，

$c+a=bk$　または　$c-a=bk$

となる正整数kが存在する．

ア). $c+a=bk$のとき，$c=bk-a$

①より，$bk\{(bk-a)-a\}=b(b-a)$

$b\neq 0$より，$k(bk-2a)=b-a$

$\therefore b(k^2-1)=a(2k-1)$

a，bは異なる素数，$k^2-1\geqq 0$，$2k-1>0$なので，

$k^2-1=as\cdots$①　　　$2k-1=bs\cdots$②

となる正整数sが存在する．

①−②より，$k^2-2k=(a-b)s<0$（$\because a<b$，$s>0$）

$\therefore k(k-2)<0$　　　$\therefore 0<k<2$

ｋは正整数なので，ｋ＝１

①より，０＝ａｓ

これはａ＞０，ｓ＞０に矛盾する．

イ)．ｃ－ａ＝ｂｋのとき，ｃ＝ｂｋ＋ａ

①より，{(ｂｋ＋ａ)＋ａ}・ｂｋ＝ｂ(ｂ－ａ)

ｂ≠０より，(ｂｋ＋２ａ)ｋ＝ｂ－ａ

$\therefore b(k^2-1)=-a(2k+1)$

これは，ａ＞０，ｂ＞０，$k^2-1 \geqq 0$，２ｋ＋１＞０に矛盾する．

ア)．イ)．より，ａ≠ｂとなることはない．

ｉ)．ｉｉ)．より，△ＡＢＣは正三角形である．

（参考）$\sqrt{2}$が無理数であることの証明