第 454 回

問題１　p を素数，n を整数とするとき，次の等式を満たす組 $(p,\ n)$ をすべて求めよ。

(1)　$p=n^2-36n+323$

(2)　$p=n^3+8$

(3)　$p=n^3-19n-27$

出典　$p=n^3-19n+33$　（2021 年　明治大学）

解答

(1)　$p=(n-17)(n-19)$

p は素数であるから，$n-17=\pm1$ または $n-19=\pm1$　$\therefore n=16,\ 18,\ 20$

[1]　$n=16$ のとき，$p=3$ （適）

[2]　$n=18$ のとき，$p=-1$ （不適）

[3]　$n=20$ のとき，$p=3$ （適）

よって，$(p,\ n)=(3,\ 16)$，$(3,\ 20)$　答

(2)　$p=(n+2)(n^2-2n+4)$

$n^2-2n+4=(n-1)^2+3>1$ より，p が素数のとき，$n+2=1$ より，$n=-1$

よって，$(p,\ n)=(7,\ -1)$　答

(3)　$p=n^3-19n-27$

n は整数であるから，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ の場合に分けてみる。

[1]　$n=3k$ のとき，$p=3(9k^3-19k-9)$

[2]　$n=3k+1$ のとき，$p=3(9k^3+9k^2-16k-15)$

[3]　$n=3k+2$ のとき，$p=3(9k^3+18k^2-7k-19)$

いずれの場合も，p は 3 の倍数となる。

3 の倍数の素数は 3 のみであるから，$p=3$

$p=3$ のとき，$n^3-19n-30=(n-5)(n+2)(n+3)=0$ より，$n=5,\ -2,\ -3$

$\therefore (p,\ n)=(3,\ 5)$，$(3,\ -2)$，$(3,\ -3)$　答

問題２　$p,\ q$ を素数とするとき，次の等式を満たす組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

(1)　$p=q^2+2$

(2)　$p^2=12q+1$

出典　$p^2=24q+1$　（2021 年　奈良女子大学）

解答

(1)　$q=2$ のとき，$p=6$ （合成数）となり，不適。

$q=3$ のとき，$p=11$ （素数）となり，適。

$q\geqq5$ のとき，q は 3 の倍数でないから，$q=3n+1$ または $q=3n+2$ と表される。

[1]　$q=3n+1$ のとき，$p=(3n+1)^2+2=3(3n^2+2n+1)$

p は 3 より大きい 3 の倍数となるから素数でない。不適

[2]　$q=3n+2$ のとき，$p=(3n+2)^2+2=3(3n^2+4n+2)$　同様に不適

以上により，等式を満たすのは，$(p,\ q)=(11,\ 3)$　答

(2)　$p^2=12q+1$　…①

①で，$q\geqq 2$ であるから，$p^2\geqq 12\cdot 2+1=25$　$\therefore\ p\geqq 5$

5 以上の素数は奇数であるから，k を整数として，$p=2k+1$（$k\geqq 2$）とおき，①に代入すると，

$(2k+1)^2=12q+1$　$\therefore\ k(k+1)=3q$　…②

②の左辺は偶数であるから，$3q$ も偶数である。

q は素数で，偶数であるから，$q=2$

これを①に代入して，$p^2=25$

p は素数であるから，$p=5$

よって，$(p,\ q)=(5,\ 2)$　答

問題 3　△ABC において三辺の長さをそれぞれ a，b，c とおく。

等式 $c^2=a^2+b^2-ab$ を満たすとき，△ABC はどんな三角形か。

ただし，a，b は素数，c は整数とする。

参考文献　BLUEBACKS　大学受験で語る数論の世界　清水健一　講談社

解答　与えられた等式を変形すると，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$

余弦定理により，△ABC の形状は，C= 60° の三角形である。

次に，$a=2mn-n^2$，$b=m^2-n^2$，$c=m^2-mn+n^2$（$m>n>0$）　…①とおくと，

$a^2+b^2-ab=(2mn-n^2)^2+(m^2-n^2)^2-(2mn-n^2)(m^2-n^2)=m^4-2m^3n+3m^2n^2-2mn^3+n^4$

$c^2=(m^2-mn+n^2)^2=m^4-2m^3n+3m^2n^2-2mn^3+n^4$

よって，①は，与えられた等式を満たす。

①より，$a=n(2m-n)$，$b=(m-n)(m+n)$ と因数分解できる。

[1]　a が素数になるとき，$n<2m-n$ より，$n=1$　このとき，$b=(m-1)(m+1)$

b も素数になるとき，$m-1<m+1$ より，$m-1=1$　$\therefore\ m=2$

したがって，$m=2,\ n=1$ のとき，①より，$a=3$（素数），$b=3$（素数），$c=3$（整数）となるから，

△ABC は正三角形となる。

[2]　b が素数になるとき，$m-n=1$　このとき，$a=n(n+2)$

a も素数になるとき，$n=1$　$\therefore\ m=2$

この場合は，[1] と同様である。

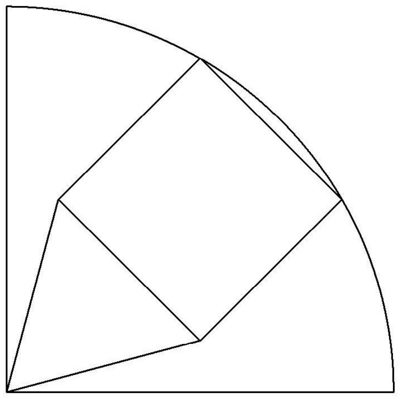
以上により，△ABC の形状は，1 辺が素数の正三角形である。　答

追加問題１

半径１の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。

１辺の長さを求めよ。

ただし，図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。



解答　１辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。

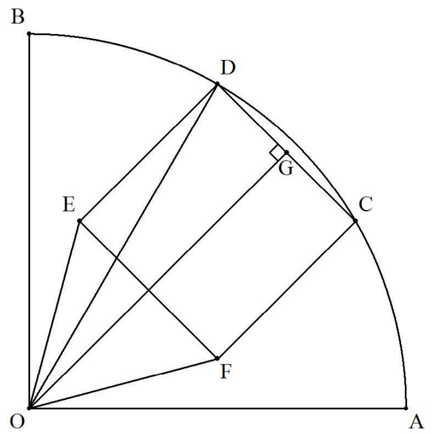
△DOG について，DO＝１，OG＝ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+a=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}a$，GD＝ $\dfrac{a}{2}$ で

あるから，三平方の定理により，$\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=1^2$

$$a^2=\frac{1}{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$a>0$ より，$a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　（≒ 0.517638 ）

よって，求める１辺の長さは，$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　答

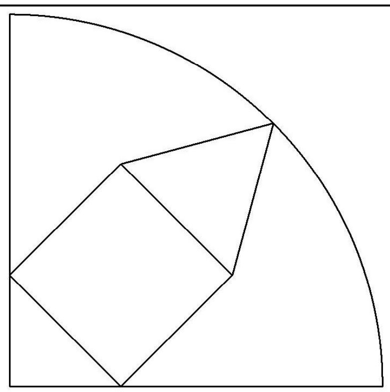


追加問題２

半径１の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。

１辺の長さを求めよ。

ただし，図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。

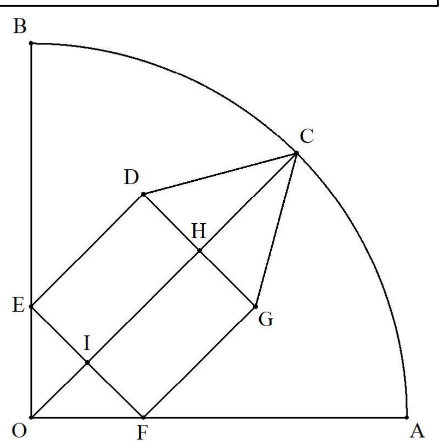


解答　１辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。

OC＝OI＋IH＋HC＝ $\dfrac{a}{2}+a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}a=1$ より，

$a=\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$　（≒ 0.42265 ）

よって，求める１辺の長さは，$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$　答



（2025/4/27　ジョーカー）