問題1

(1) 与式を因数分解すると、

$$p = (n - 19)(n - 17)$$

となり、2つの積に分解できます。pは素数なので、どちらかは± 1で、

$$n - 19 = \pm 1, n - 17 = \pm 1 \Rightarrow n = 16,18,20$$

が解の候補となります。ここで、$p > 0$なので、$n = 18$は不適です。よって、

$$(p, n) = (3,16)(3,20)$$

です。

(2) こちらも与式を因数分解すると、

$$p = (n + 2)(n^2 - 2n + 4) = (n + 2)\{(n - 1)^2 + 3\}$$

となりなりますが、$\{(n - 1)^2 + 3\} > 1$なので、

$$n + 2 = 1 \Rightarrow n = -1$$

となります。よって、

$$(p, n) = (7, -1)$$

です。

(3) 与式が3の倍数であることを示します。次のように変形すると、

$$n^3 - 19n - 27 = n^3 - n - 18n - 27 = n(n^2 - 1) - 9(2n + 3)$$
$$= (n - 1)n(n + 1) - 9(2n + 3)$$

となって、第1項目は連続する3個の整数の積なので、3の倍数です。また、第2項目は9の倍数なので、3の倍数です。そして、3の倍数の中で素数pは3だけなので、

$$n^3 - 19n - 27 = 3 \Rightarrow n = -3, -2,5$$

です。よって、

$$(p, n) = (3, -3,)(3, -2)(3,5)$$

です。

問題2

(1) 与式を変形して解けそうにないので、素数qを3の剰余類で類別して考えました。

・qが3で割った余りが1または2の場合

与式を次のように変形します。

$$p = q^2 + 2 = (q-1)(q+1) + 3$$

すると、$q-1$または$q+1$が3の倍数なので、pは3より大きな3の倍数となります。そのような素数は存在しないので、このケースあり得ません。

・qが3で割った余りが0の場合

このケースに当てはまる素数qは3だけなので、$p = 3^2 + 2 = 11$です。

以上より、

$$(p, q) = (11, 3)$$

です。

(2) 与式を変形すると、

$$p^2 = 12q - 1 \Rightarrow (p-1)(p+1) = 2^2 \cdot 3q$$

となりますが、pは素数なので、$p \pm 1$は偶数です。2を因数に持つので、

$$A\begin{cases} p-1 = 2 \cdot 3 \\ p+1 = 2 \cdot q \end{cases} \quad \text{または} \quad B\begin{cases} p-1 = 2 \cdot q \\ p+1 = 2 \cdot 3 \end{cases}$$

です。Aの解は$(p, q) = (7, 4)$ですが、qが素数ではないので、不適です。Bの解は$(p, q) = (5, 2)$で、条件を満たします。

よって、

$$(p, q) = (5, 2)$$

です。

問題3 △ABCに余弦定理を適用すると、

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

ですが、与式は上式で$C = \frac{\pi}{3}$とやった場合で、

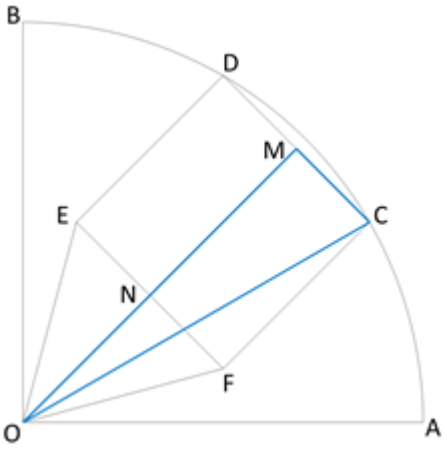
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3} = a^2 + b^2 - ab$$

です。ここで、$a = b$なら、

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = a^2 + a^2 - a^2 = a^2 \Rightarrow c = a$$

ですから、正三角形です。$a \neq b$のケースはあり得ないので(証明は補足に記載)、△ABCは辺の長さが素数の正三角形となります。

追加問題1



図のように、各点に記号を付けます。ただし、M, NはそれぞれCD, EFの中点とします。正方形と正三角形の一辺の長さをaとし、$\triangle \mathrm{OCM}$に三平方の定理を適用すると、

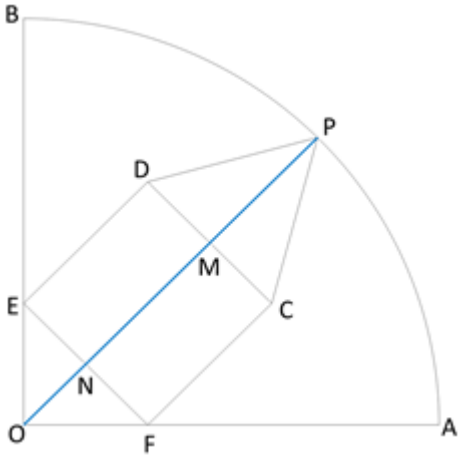
$$\mathrm{OM}^2 + \mathrm{CM}^2 = \mathrm{OC}^2 \Rightarrow (\mathrm{MN} + \mathrm{ON})^2 + \mathrm{CM}^2 = \mathrm{OC}^2$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{CF} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OF}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{CD}}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{a}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \mathrm{a} = \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

です。ここで、$\mathrm{a} > 0$なので、一辺の長さは$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$です。

追加問題2



図のように、各点に記号を付けます。正方形と正三角形の一辺の長さをaとすると、

$$\mathrm{ON} + \mathrm{NM} + \mathrm{MP} = 1 \Rightarrow \mathrm{FN} + \mathrm{CF} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{CP} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{EF} + \mathrm{CF} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{CP} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{a} + \mathrm{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{a} \Rightarrow= 1 \Rightarrow \mathrm{a} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

です。よって、一辺の長さは$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$です。

補足 $\mathbf{a \neq b}$**のとき、**$\mathbf{a^2 - ab + b^2 = c^2}$**を満たす整数解は存在しない**

$a^2 - ab + b^2 = c^2$はディオファントス方程式の1つですが、a, b, cが互いに素であるもの（原始解）は、互いに素な整数m, n（$n < m$）を用いて、次のように表せることが知られています。

$a = m^2 - n^2 \cdots ①$

$b = 2mn - n^2 \cdots ②$

$c = m^2 - mn + n^2 \cdots ③$

これを用いて、$a \neq b$を仮定して矛盾を導きます。

①より、

$a = (m - n)(m + n)$

と分解できますが、aは素数なので、どれかは1でなければなりません。$m, n > 0$なので、

$m - n = 1 \Rightarrow m = n + 1$

です。これを②に入れると、

$b = 2mn - n^2 = 2(n + 1)n - n^2 = n(n + 2)$

ですが、bは素数なので、$n = 1$です。このとき、$m = n + 1 = 1 + 1 = 2$です。これを①②に入れると、

$a = m^2 - n^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$b = 2mn - n^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1^2 = 3$

となります。これは、仮定$a \neq b$に反します。

よって、$a^2 - ab + b^2 = c^2$を満たすのは、$a = b = 3$のときに限ります。原始解でない解（共通の約数を持つ解）を考えても、a, bが素数となるのは原始解の場合に限られます。

したがって、a, bが異なる素数であり、かつcが整数となるような解(a, b, c)は存在しません。