454解答　よふかしのつらいおじさん

問題1

(1)

$p=n^{2}-36n+323=\left(n-17\right)\left(n-19\right)$ なので、

$$・n-17 が\pm 1になるのは、$$

$$ n=18 \rightarrow \left(n-17\right)\left(n-19\right)=1×\left(-1\right)=-1 \cdots ×$$

$$ n=16 \rightarrow \left(n-17\right)\left(n-19\right)=\left(-1\right)×\left(-3\right)=3 \cdots O$$

$$・n-19 が\pm 1になるのは、$$

$$ n=20 \rightarrow \left(n-17\right)\left(n-19\right)=3×1=3 \cdots O$$

$$ n=18 \rightarrow \left(n-17\right)\left(n-19\right)=1×\left(-1\right)=-1 \cdots ×$$

$$よって、\left(p,n\right)=\left(3,16\right),\left(3,20\right)$$

(2)

$p=n^{3}+8=\left(n+2\right)\left(n^{2}-2n+4\right)$ なので、

$$・n+2が\pm 1になるのは、$$

$$ n=-1 \rightarrow n^{3}+8 =7 \cdots O$$

$$ n=-3 \rightarrow n^{3}+8 =-19 \cdots ×$$

$$・n^{2}-2n+4=\left(n-1\right)^{2}+3なので、n^{2}-2n+4は\pm 1になりません。$$

$$よって、\left(p,n\right)=\left(7,-1\right)$$

(3)

3次の項がある(展開に3の係数が多い)ので、ｎを3の倍数を基準に整理します。

・ｎ＝3ｋのとき、

$$ p=n^{3}-19n-27=\left(3k\right)^{3}-19\left(3k\right)-27=27k^{3}-57k-27=3\left(9k^{3}-19k-9\right)$$

 なので、ｐは3の倍数です。

・ｎ＝3ｋ＋1のとき、

$$ p=n^{3}-19n-27=\left(3k+1\right)^{3}-19\left(3k+1\right)-27=27k^{3}+27k^{2}-48k-45$$

$$ =3\left(9k^{3}+9k^{2}-16k-15\right)$$

 なので、ｐは3の倍数です。

・ｎ＝3ｋ－1のとき、

$$ p=n^{3}-19n-27=\left(3k-1\right)^{3}-19\left(3k-1\right)-27=27k^{3}-27k^{2}-48k-9$$

$$ =3\left(9k^{3}-9k^{2}-16k-3\right)$$

 なので、ｐは3の倍数です。

以上からｐはｎの値によらず、3の倍数です。

よって、ｐが素数は3のときなので、

$$p=n^{3}-19n-27=3 \rightarrow n^{3}-19n-30=0 \rightarrow \left(n-5\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)=0 $$

よって、$\left(p,n\right)=\left(3,5\right),\left(3,-2\right),\left(3,-3\right)$

問題2

自然数を6個ずつ縦に書き出してみると、2，3以外の素数は、$6k\pm 1$ の形をしています。



(1)

5以上の素数は、$6k\pm 1$ の形をしています。(ｋは自然数)

よって、$q=6k\pm 1$ として、

$$p=q^{2}+2=\left(6k\pm 1\right)^{2}+2=36k^{2}\pm 12k+1+2=12k\left(3k\pm 1\right)+3$$

$=3×\left\{4k\left(3k\pm 1\right)+1\right\}$

となるので、ｐは素数になりません。

よって、ｑは3の場合しか可能性がありません。

$q=3$ として、

$$p=q^{2}+2=3^{2}+2=11$$

よって、$\left(p,q\right)=\left(11,3\right)$

(2)

$$p^{2}=12q+1$$

上の問題と同様に $p=6k\pm 1$ とすると、

$p^{2}=\left(6k\pm 1\right)^{2}=36k^{2}\pm 12k+1=12k\left(3k\pm 1\right)+1$

よって、$k=1$ で、$3k\pm 1$ が素数を考えると、$3∙1-1=2$ が素数です。

$12∙2+1=25=5^{2}$

より、$\left(p,q\right)=\left(5,2\right)$

問題3

△ABCに余弦定理を用いると、$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos(C)$

これと $c^{2}=a^{2}+b^{2}-ab \cdots \left(1\right)$を比較して、$2\cos(C)=1 \rightarrow ∠C=60°$

1. 右辺に偶数の素数2があるか確認します。

ｂ＝2とすると式(1)は、

$c^{2}=a^{2}+b^{2}-ab=a^{2}+4-2a=\left(a-1\right)^{2}+3$

右辺は平方数になるのですが、平方数に3を加えているので、$1^{2}+3=2^{2}$ の場合しかありません。

ａ＝2、ｃ＝2となるので、3辺とも2です。

つまり、1辺2の正三角形になります。

正三角形は、 ∠C＝60°です。

正三角形なら辺の長さに関係なく式(1)が成立します。

1辺の長さが素数の正三角形が求める解になります。

(1辺の長さ：2、3、5、7、11、13、17，19，23、29、･･･)

2以外の偶数は素数ではありません。

2が含まれない場合、右辺のａ、ｂは3以上の素数(奇数)になります。

式(1)の右辺のａ、ｂは奇数です。

奇数の平方も奇数同士の積も奇数です。

奇数の和や差を考えると、右辺は奇数、つまりｃも奇数となります。

まとめると、ａ、ｂ、ｃのすべてが奇数です。

**この後は、正三角形以外の場合を考えます。**

(3辺の長さが異なる)

1. 右辺に3があるかを調べます。

式(1)のｂ＝3とすると、

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-ab=a^{2}+9-3a=\left(a-3\right)^{2}+3a \rightarrow c^{2}-\left(a-3\right)^{2}=3a $$

$\rightarrow \left(\overline{c+a}-3\right)\left(\overline{c-a}+3\right)=3a \cdots \left(2\right)$

式(2)の下線部は奇数と奇数の和と差です。

奇数と奇数の和も差も偶数です。

3は奇数なので偶数との和も差も3の倍数になりません。

ａとｃが奇数の場合、式(2)は成立しません。

つまり、右辺に3はありません。

1. 右辺に2と3がないので5以上の素数について考えます。

5以上の素数は、6ｋ±1と表せるので、ｂ＝6ｋ+1としてみると、

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-ab=a^{2}+\left(6k+1\right)^{2}-\left(6k+1\right)a=\left\{a-\left(6k+1\right)\right\}^{2}+\left(6k+1\right)a $$

$$\rightarrow c^{2}-\left\{a-\left(6k+1\right)\right\}^{2}=\left(6k+1\right)a $$

$$\rightarrow \left\{\overline{c+a}-\left(6k+1\right)\right\}\left\{\overline{c-a}+\left(6k+1\right)\right\}=\left(6k+1\right)a \cdots \left(3\right)$$

式の成り立ちをみて、ｃとａは奇数なので、和や差は偶数になり、素数(奇数)の $\left(6k+1\right)$ を因数には持ちません。

よって、ａ、ｂが5以上の素数のとき、式(3)は成り立ちません。

つまり、6ｋ+1はないことになります。

(6ｋ－1も同様)

以上から△ABCが正三角形のとき以外成り立たないことがわかります。

追加問題1

図のように座標軸をとります。

正方形、正三角形の1辺の長さをａとします。

点Ｂの座標は$\left(a,0\right)$ です。

∠CBX＝30度なので、

$$直線BC：y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-a\right)$$

半径1の円の方程式と連立させて点Cの座標を求めます。

$$\left\{\begin{array}{c}y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-a\right)\\x^{2}+y^{2}=1 \end{array} \rightarrow x^{2}+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-a\right)\right\}^{2}=1\right. \rightarrow x=\frac{-3a+\sqrt{4-a^{2}}}{4}\left(>0\right) $$

$$\rightarrow y=\frac{-\sqrt{3}a+\sqrt{4-a^{2}}}{4} \rightarrow C\left(\frac{-3a+\sqrt{4-a^{2}}}{4},\frac{-\sqrt{3}a+\sqrt{4-a^{2}}}{4}\right)$$

BCの長さの2乗がａ2なので、

$$\left(\frac{-3a+\sqrt{4-a^{2}}}{4}-a\right)^{2}+\left(\frac{-\sqrt{3}a+\sqrt{4-a^{2}}}{4}\right)^{2}=a^{2} \rightarrow 2-a^{2}-\sqrt{3}a\sqrt{4-a^{2}}=0 $$

$$\rightarrow a^{4}-4a^{2}+1=0 \rightarrow a^{2}=2-\sqrt{3 }\left(<1\right) $$

$$\rightarrow a=\sqrt{2-\sqrt{3 }}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$



追加問題2

正三角形、正方形の1辺の長さをａとします。

1＝OC＝OA＋AB＋BCなので、

$$1=\frac{a}{2}+a+\frac{\sqrt{3}a}{2} \rightarrow 1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a \rightarrow a=\frac{2}{3+\sqrt{3}}×\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{6-2\sqrt{3}}{6}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

