454解答　よふかしのつらいおじさん

問題1

(1)

なので、

(2)

なので、

(3)

3次の項がある(展開に3の係数が多い)ので、ｎを3の倍数を基準に整理します。

・ｎ＝3ｋのとき、

なので、ｐは3の倍数です。

・ｎ＝3ｋ＋1のとき、

なので、ｐは3の倍数です。

・ｎ＝3ｋ－1のとき、

なので、ｐは3の倍数です。

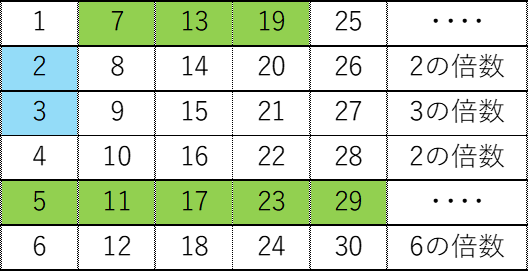
以上からｐはｎの値によらず、3の倍数です。

よって、ｐが素数は3のときなので、

よって、

問題2

自然数を6個ずつ縦に書き出してみると、2，3以外の素数は、 の形をしています。



(1)

5以上の素数は、 の形をしています。(ｋは自然数)

よって、 として、

となるので、ｐは素数になりません。

よって、ｑは3の場合しか可能性がありません。

として、

よって、

(2)

上の問題と同様に とすると、

よって、 で、 が素数を考えると、 が素数です。

より、

問題3

△ABCに余弦定理を用いると、

これと を比較して、

1. 右辺に偶数の素数2があるか確認します。

ｂ＝2とすると式(1)は、

右辺は平方数になるのですが、平方数に3を加えているので、 の場合しかありません。

ａ＝2、ｃ＝2となるので、3辺とも2です。

つまり、1辺2の正三角形になります。

正三角形は、 ∠C＝60°です。

正三角形なら辺の長さに関係なく式(1)が成立します。

1辺の長さが素数の正三角形が求める解になります。

(1辺の長さ：2、3、5、7、11、13、17，19，23、29、･･･)

2以外の偶数は素数ではありません。

2が含まれない場合、右辺のａ、ｂは3以上の素数(奇数)になります。

式(1)の右辺のａ、ｂは奇数です。

奇数の平方も奇数同士の積も奇数です。

奇数の和や差を考えると、右辺は奇数、つまりｃも奇数となります。

まとめると、ａ、ｂ、ｃのすべてが奇数です。

**この後は、正三角形以外の場合を考えます。**

(3辺の長さが異なる)

1. 右辺に3があるかを調べます。

式(1)のｂ＝3とすると、

式(2)の下線部は奇数と奇数の和と差です。

奇数と奇数の和も差も偶数です。

3は奇数なので偶数との和も差も3の倍数になりません。

ａとｃが奇数の場合、式(2)は成立しません。

つまり、右辺に3はありません。

1. 右辺に2と3がないので5以上の素数について考えます。

5以上の素数は、6ｋ±1と表せるので、ｂ＝6ｋ+1としてみると、

式の成り立ちをみて、ｃとａは奇数なので、和や差は偶数になり、素数(奇数)の を因数には持ちません。

よって、ａ、ｂが5以上の素数のとき、式(3)は成り立ちません。

つまり、6ｋ+1はないことになります。

(6ｋ－1も同様)

以上から△ABCが正三角形のとき以外成り立たないことがわかります。

追加問題1

図のように座標軸をとります。

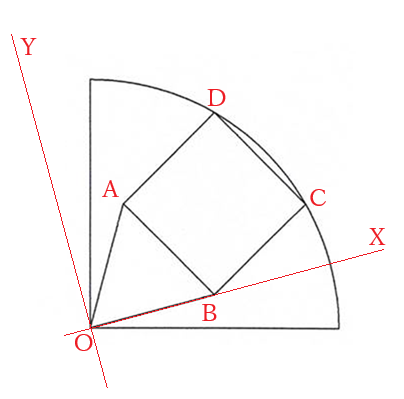
正方形、正三角形の1辺の長さをａとします。

点Ｂの座標は です。

∠CBX＝30度なので、

半径1の円の方程式と連立させて点Cの座標を求めます。

BCの長さの2乗がａ2なので、



追加問題2

正三角形、正方形の1辺の長さをａとします。

1＝OC＝OA＋AB＋BCなので、

