

● 問題 454 解答＜三角定規＞

[問題 1]

$$(1) p=n^2-36n+323=(n-19)(n-17) \cdots \textcircled{1}$$

p は素数だから、 $\textcircled{1}$ より $(n-19, n-17)=(-p, -1), (1, p)$

前者のとき $n=16, p=3$, 後者のとき $n=20, p=3$

以上より, $(p, n)=(3, 16), (3, 20) \cdots$ [答]

$$(2) p=n^3+8=(n+2)(n^2-2n+4) \cdots \textcircled{2}$$

$$n^2-2n+4=(n-1)^2+3>0 \text{ かつ } n^2-2n+4-(n+2)=n^2-3n+2=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

であるから, n が整数のとき $0 \leq n+2 \leq n^2-2n+4 \cdots \textcircled{3}$

p は素数だから, $\textcircled{2}\textcircled{3}$ より $(n+2, n^2-2n+4)=(1, p) \therefore n=-1, p=7$

以上より, $(p, n)=(7, -1) \cdots$ [答]

$$(3) p=n^3-19n-27$$

k を整数として

$$\cdot n=3k \text{ のとき, } p=3(9k^3-19k-9)$$

$$\cdot n=3k+1 \text{ のとき, } p=(3k+1)^3-19(3k+1)-27=3(9k^3+9k^2-16k-15)$$

$$\cdot n=3k+2 \text{ のとき, } p=(3k+2)^3-19(3k+2)-27=3(9k^3+18k^2-7k-19)$$

であるから, p はすべて 3 の倍数である。よって, $p=3$ になる 場合があればそれが解で

$$n^3-19n-27=3, \quad n^3-19n-30=(n-5)(n+2)(n+3)=0 \quad \therefore n=-3, -2, 5$$

以上より, $(p, n)=(3, -3), (3, -2), (3, 5) \cdots$ [答]

[問題 2]

$$(1) p=q^2+2$$

目視により $11=3^2+2$ であるから, $(p, q)=(11, 3)$ は解である。

3 以外の素数 q を $q=3k \pm 1$ (k : 自然数) とすると

$$q^2+2=3(3k^2 \pm 2k+1) \text{ となり } 3 \text{ の倍数となるから素数ではない。}$$

以上より, 唯一の解が $(p, q)=(11, 3) \cdots$ [答]

$$(2) p^2=12q+1$$

$$p^2-1=(p-1)(p+1)=12q$$

$p-1 < p+1$ で, q は素数だから

$$(p-1, p+1)=(1, 12q), (2, 6q), (3, 4q), (4, 3q), (6, 2q), (12, q) \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ より $p=2, 3, 4, 5, 7, 13$ となるが, これらを $p+1$ に戻して q が素数になるのは

$p=5, q=2$ のみである。以上より, $(p, q)=(5, 2) \cdots$ [答]

〔問題 3〕

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$c^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 \quad \therefore 3b^2 = 4c^2 - (2a - b)^2$$

$$\therefore 3b^2 = (2c - 2a + b)(2c + 2a - b) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$2c - 2a + b$, $2c + 2a - b$ は整数で, $2c - 2a + b < 2c + 2a - b$,

さらに, b は素数だから, ②の右辺の積は (i) 1 と $3b^2$, (ii) 3 と b^2 ,

(iii) b と $3b$ の 3 つの場合のみである。

(i) のとき

$$2c - 2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$2c + 2a - b = 3b^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3}: 4a = 3b^2 + 2b - 1 = (3b - 1)(b + 1)$$

$b = 2$ はこれを満たさないから $b = 2k + 1$ とおくと, $4a = (6k + 2)(2k + 2) \quad \therefore a = (3k + 1)(k + 1)$

これは, a が素数であることに反する。

(ii) のとき

$$2c - 2a + b = 3 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$2c + 2a - b = b^2 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} - \textcircled{5}: 4a = b^2 + 2b - 3 = (b - 1)(b + 3)$$

$b = 2$ はこれを満たさないから $b = 2k + 1$ とおくと, $4a = 2k(2k + 4) \quad \therefore a = k(k + 2)$

a は素数だから $k = 1$, このとき, $a = b = c = 3 \quad \cdots \textcircled{7}$

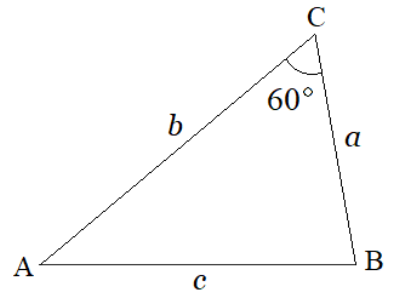
(iii) のとき

$$2c - 2a + b = b \quad \cdots \textcircled{8}$$

$$2c + 2a - b = 3b \quad \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8} + \textcircled{9} \text{ より } c = b, \text{ これを戻して } a = b = c \quad \cdots \textcircled{10}$$

⑦は⑩に含まれるから, 題意を満たす $\triangle ABC$ は, 辺の長さが素数である正三角形 $\cdots$ [答]



《追加問題》

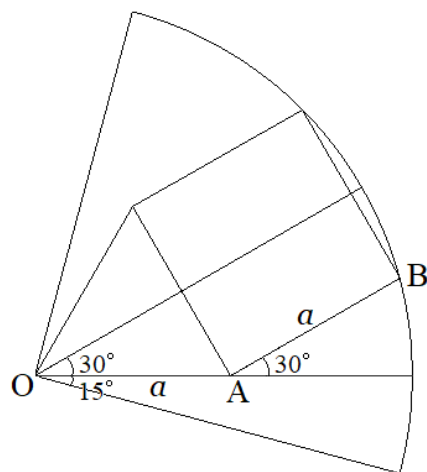
[問題 1] 図を時計回りに 15° 回転させると右図となる。求める 1 辺

の長さを a とすると, 図の B 点が円周上にあるから,

$$\left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 1$$

$$\text{整理して, } a^2 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad (=0.517\cdots) \cdots [\text{答}]$$



[問題 2] 図を時計回りに 45° 回転させると右図となる。求める 1 辺

の長さを a とすると, $\frac{1}{2}a + a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 1$

$$\therefore a = \frac{2}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \quad (=0.422\cdots) \cdots [\text{答}]$$

