

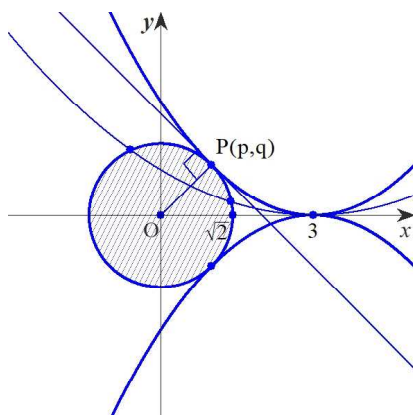
4 5 5. 問題 1. $x^2 + y^2 \leq 2 \cdots \textcircled{1}$

①は、原点O中心、半径 $\sqrt{2}$ の円の周および内部を表す.

$$t = \frac{y}{(x-3)^2} \text{ とすると, } y = t(x-3)^2 \cdots \textcircled{2}$$

これは、頂点(3, 0), x^2 の項の係数がtの放物線を表す. ただし, $t=0$ のときは, x軸を表す.

①, ②に共有点があればよい.



グラフより, ①, ②が, $x > 0, y > 0$ の部分で接するとき, tは最大となり,
 $x > 0, y < 0$ の部分で接するとき, tは最小となる.

最大値を求める. 接点をP(p, q) ($p > 0, q > 0$) とするとき,

$$p^2 + q^2 = 2$$

$$q > 0 \text{ より, } q = \sqrt{2 - p^2}$$

$$\text{OPの傾きは, } \frac{q}{p} = \frac{\sqrt{2 - p^2}}{p}$$

$$\text{接線の傾きは, } -\frac{p}{\sqrt{2 - p^2}}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } y' = 2t(x-3)$$

$$\text{接線の傾きは, } 2t(p-3) = -\frac{p}{\sqrt{2 - p^2}} \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{また } P(p, \sqrt{2 - p^2}) \text{ は } \textcircled{2} \text{ 上の点なので, } \sqrt{2 - p^2} = t(p-3)^2$$

$$\text{グラフより, } p \neq 3 \text{ なので, } t = \frac{\sqrt{2 - p^2}}{(p-3)^2} \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ に代入すると, } 2 \cdot \frac{\sqrt{2 - p^2}}{(p-3)^2} \cdot (p-3) = -\frac{p}{\sqrt{2 - p^2}}$$

$$\therefore 2(2 - p^2) = -p(p-3) \quad \therefore p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$\therefore (p-1)(p+4) = 0$$

グラフより、 $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$ $\therefore p = 1$

$\therefore P(1, 1)$

④より、最大値は、 $t = \frac{1}{4}$

同様に、最小値は、 $t = -\frac{1}{4}$ で、接点は、 $(1, -1)$

問題2. $t = \frac{4x^3 + 4y^3 + 8}{x + y + 2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$) とすると、 $t > 0$ であり、

$$t(x + y + 2) = 4x^3 + 4y^3 + 8$$

$$\therefore 4x^3 - tx + (4y^3 - ty - 2t + 8) = 0$$

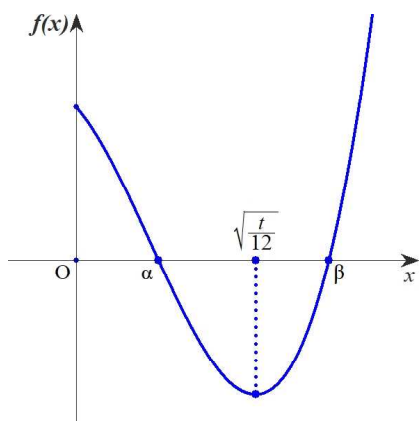
$f(x) = 4x^3 - tx + (4y^3 - ty - 2t + 8)$ とする.

x の3次方程式 $f(x) = 0$ が、 $x \geq 0$ の範囲で解を持てばよい.

$f'(x) = 12x^2 - t$, $x \geq 0$, $t > 0$ であるから、

$0 \leq x < \sqrt{t/12}$ のとき、 $f'(x) < 0$

$x > \sqrt{t/12}$ のとき、 $f'(x) > 0$



故に $f(x)$ は $x = \sqrt{t/12}$ のとき、最小となる.

故に $f(\sqrt{t/12}) \leq 0$ となればよい.

$$f(\sqrt{t/12}) = 4(\sqrt{t/12})^3 - t\sqrt{t/12} + (4y^3 - ty - 2t + 8)$$

$$= \frac{t}{3}\sqrt{t/12} - t\sqrt{t/12} + 4y^3 - ty - 2t + 8$$

$$= -\frac{2}{3}t\sqrt{t/12} + 4y^3 - ty - 2t + 8$$

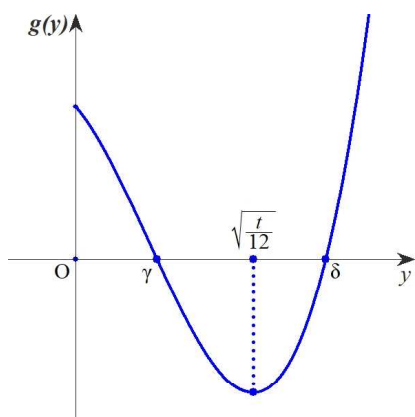
$$= -\frac{t}{3}\sqrt{t/3} + 4y^3 - ty - 2t + 8$$

$$= 4y^3 - ty - \frac{t^{3/2}}{3\sqrt{3}} - 2t + 8 \leq 0$$

より、 $g(y) = 4y^3 - ty - \frac{t^{3/2}}{3\sqrt{3}} - 2t + 8$ とするとき、 y の 3 次不等式

$g(y) \leq 0$ が、 $y \geq 0$ の範囲で解を持てばよい。

$g'(y) = 12y^2 - t$ であるので、上記と同様に、 $g(y)$ は $y = \sqrt{t/12}$ のとき、最小となる。



故に $g(\sqrt{t/12}) \leq 0$ となればよい。

$$\begin{aligned} g(\sqrt{t/12}) &= 4(\sqrt{t/12})^3 - t\sqrt{t/12} - \frac{t^{3/2}}{3\sqrt{3}} - 2t + 8 \\ &= -\frac{t^{3/2}}{3\sqrt{3}} - \frac{t^{3/2}}{3\sqrt{3}} - 2t + 8 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2} - 2t + 8 \leq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $t^{3/2} + 3\sqrt{3}t - 12\sqrt{3} \geq 0$

$\sqrt{t} = s$ とすると、 $s > 0$ 、 $s^3 + 3\sqrt{3}s^2 - 12\sqrt{3} \geq 0$

$$\therefore (s - \sqrt{3})(s^2 + 4\sqrt{3}s + 12) \geq 0 \quad \therefore (s - \sqrt{3})(s + 2\sqrt{3})^2 \geq 0$$

$$\therefore s \geq \sqrt{3} \quad \therefore \sqrt{t} \geq \sqrt{3} \quad \therefore t \geq 3$$

$$t = 3 \text{ のとき、 } x = y = \frac{1}{2}$$

故に最小値は、3 である。

(別解) VBSCRIPTで計算してみると,

