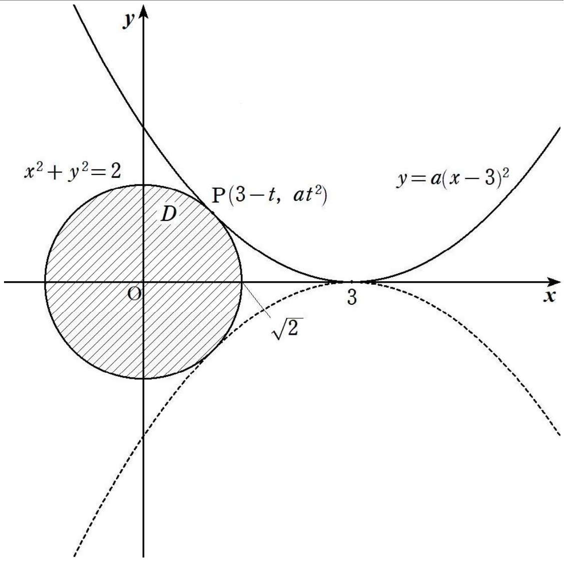
第 455 回

設問 1

実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2\leqq 2$ を満たすとき，$\dfrac{y}{(x-3)^2}$ の最大値を求めよ。

（2013 年東邦大学（医学部）入試問題の類題）

解答



$D=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqq 2\}$ は，円 $x^2+y^2=2$　…①

の内部（周を含む）を表す領域である。（右図斜線部分）

$\dfrac{y}{(x-3)^2}=a$ とおき，分母を払うと，$y=a(x-3)^2$　…②

これは，頂点 $(3,\ 0)$ の放物線で，D と共有点をもちながら

a の値を変化させると，P で接するとき最大になる。

このとき，下に凸の放物線であるから，$a>0$ である。

②上の点として，$\mathrm{P}(3-t,\ at^2)$ とおくと，これは①上の点でも

あるから，$(3-t)^2+(at^2)^2=2$（$3-\sqrt{2}<t<3$　…③）

整理すると，$a^2t^4+t^2-6t+7=0$　…④

④の両辺を t で微分すると，$4a^2t^3+2t-6=0$

$\therefore 2a^2t^3+t-3=0$　…⑤

①と②は接するから，④は重解 α をもち，⑤も解 α をもつから，（※）

$a^2\alpha^4+\alpha^2-6\alpha+7=0$　…④′

$2a^2\alpha^3+\alpha-3=0$　…⑤′

④′×2 −⑤′×α より，$\alpha^2-9\alpha+14=0$　$(\alpha-2)(\alpha-7)=0$　$\therefore \alpha=2,\ 7$

③より，$t=\alpha=2$

⑤′より，$a^2=\dfrac{1}{16}$　$a>0$ より，$a=\dfrac{1}{4}$

$a=\dfrac{1}{4}$，$t=2$ のとき，$\mathrm{P}(1,\ 1)$ となる。

よって，$x=1,\ y=1$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}$　答

補足　最小値は，$-\dfrac{1}{4}$（$x=1$，$y=-1$ のとき）

（※）

$f(x)=(x-\alpha)^2g(x)$ のとき，$f'(x)=2(x-\alpha)g(x)+(x-\alpha)^2g'(x)=(x-\alpha)\{2g(x)+(x-\alpha)g'(x)\}$ であるから，

方程式 $f(x)=0$ が $x=\alpha$（2 重解）をもつとき，方程式 $f'(x)=0$ は $x=\alpha$ を解にもつ。

設問 2

$x \geqq 0$ ，　$y \geqq 0$ のとき，$\dfrac{4(x^3+y^3)+8}{x+y+2}$ の最小値を求めよ。

（2006 年一橋大学入試問題の類題）

解答

$x+y=t$ とおく。

$x \geqq 0$ ，　$y \geqq 0$ より，相加平均≧相乗平均であるから，$\dfrac{t}{2}=\dfrac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$　$\therefore\ xy \leqq \dfrac{t^2}{4}$ （等号は，$x=y$ のとき）

このとき，

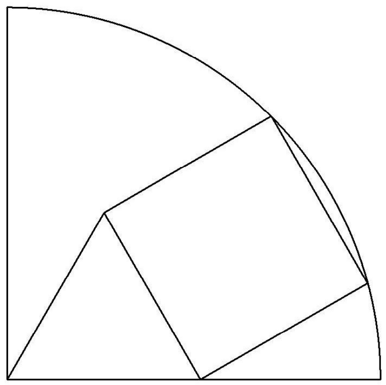
$$\frac{4(x^3+y^3)+8}{x+y+2}=\frac{4\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}+8}{x+y+2} \geqq \frac{4\left(t^3-3\cdot\dfrac{t^2}{4}\cdot t\right)+8}{t+2}=\frac{t^3+8}{t+2}=t^2-2t+4=(t-1)^2+3 \geqq 3$$

∴最小となるのは，等号が成り立ち，かつ $t=1$ のとき。

よって，$x=y=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値は 3　答

追加問題 1

半径 1 の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。
1 辺の長さを求めよ。

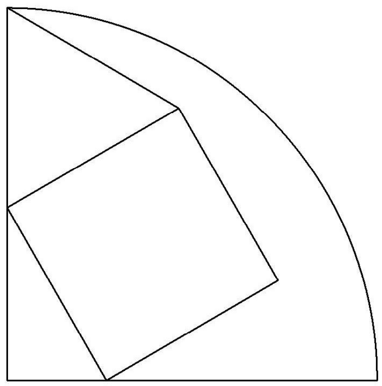


解答　前回（第 454 回）の追加問題 1 の正方形と正三角形を結合させた五角形を，四分円の中心で $-15°$ だけ回転させた図形であるから，1 辺の長さは変わらない。

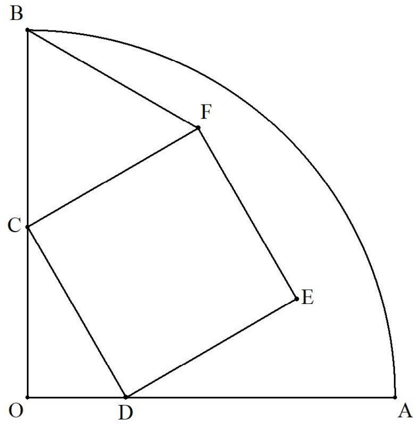
よって，求める 1 辺の長さは，$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　答

追加問題 2

半径 1 の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。
1 辺の長さを求めよ。



解答　1 辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。



$\angle \mathrm{DCO} = 180° - (60° + 90°) = 30°$ であるから，$\mathrm{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\mathrm{OB} = \mathrm{OC} + \mathrm{CB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + a = 1$ より，

$a = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3})$　（$\fallingdotseq 0.535898$）

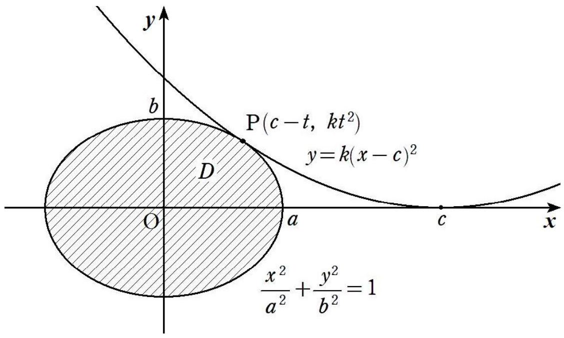
よって，求める 1 辺の長さは，$2(2-\sqrt{3})$　答

（2025/5/25　ジョーカー）

設問 1の類題1

実数 x, y が $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ を満たすとき，$\dfrac{y}{(x-c)^2}$ の最大値を求めよ。ただし，$c>a>0$, $b>0$ とする。

解答



$D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1\right\}$ は，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …①

の内部（周を含む）を表す領域である。（右図）

$\dfrac{y}{(x-c)^2}=k$ とおき，分母を払うと，$y=k(x-c)^2$ …②

これは，頂点 $(c,\ 0)$ の放物線で，D と共有点をもちながら

k の値を変化させると，Pで楕円に接するとき最大になる。

このとき，下に凸の放物線であるから，$k>0$ である。

②上の点として，$\mathrm{P}(c-t,\ kt^2)$ とおくと，これは①上の点でもあるから，

$\dfrac{(c-t)^2}{a^2}+\dfrac{(kt^2)^2}{b^2}=1$ （$c-a<t<c$ …③）

整理すると，$a^2k^2t^4+b^2(c-t)^2-a^2b^2=0$ …④

④の両辺を t で微分すると，$4a^2k^2t^3+2b^2(c-t)(-1)=0$

両辺を 2 で割ると，$2a^2k^2t^3-b^2(c-t)=0$ …⑤

①と②は接するから，④は重解 α をもち，⑤も解 α をもつから，

$a^2k^2\alpha^4+b^2(c-\alpha)^2-a^2b^2=0$ …④′

$2a^2k^2\alpha^3-b^2(c-\alpha)=0$ …⑤′

④′×2 −⑤′× α より，$b^2(c-\alpha)(2c-\alpha)-2a^2b^2=0$ 　$b\neq 0$ より，$(c-\alpha)(2c-\alpha)-2a^2=0$

$\alpha^2-3c\alpha+2c^2-2a^2=0$ 　$\alpha=\dfrac{3c\pm\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$

③より，$t=\alpha=\dfrac{3c-\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$ …⑥

⑤より，$k^2=\dfrac{b^2(c-t)}{2a^2t^3}$ 　$k>0$ より，$k=\dfrac{b}{at}\sqrt{\dfrac{c-t}{2t}}=\dfrac{b(3c+\sqrt{8a^2+c^2})\sqrt{4a^2-c^2+c\sqrt{8a^2+c^2}}}{8\sqrt{2}\,a(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$

⑥のとき，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$x=c-t=\dfrac{-c+\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$，$y=kt^2=\dfrac{b\sqrt{-2a^2-c^2+c\sqrt{8a^2+c^2}}}{\sqrt{2}\,a}$

よって，$x=\dfrac{-c+\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$，$y=\dfrac{b\sqrt{-2a^2-c^2+c\sqrt{8a^2+c^2}}}{\sqrt{2}\,a}$ のとき，

最大値 $\dfrac{b(3c+\sqrt{8a^2+c^2})\sqrt{4a^2-c^2+c\sqrt{8a^2+c^2}}}{8\sqrt{2}\,a(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$ 答

例題1　実数 x, y が $x^2+y^2\leqq 2$ を満たすとき，$\dfrac{y}{(x-3)^2}$ の最大値を求めよ。【設問 1】

$a=b=\sqrt{2}$，$c=3$ のときであるから，$x=1$，$y=1$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}$ 答

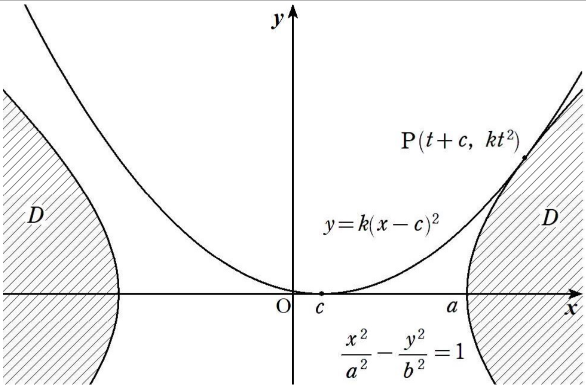
例題2　実数 x, y が $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}\leqq 1$ を満たすとき，$\dfrac{y}{(x-7)^2}$ の最大値を求めよ。

$a=3$，$b=\sqrt{5}$，$c=7$ のときであるから，$x=2$，$y=\dfrac{5}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{15}$　答

設問 1 の類題 2

実数 x, y が $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\geqq 1$ を満たすとき，$\dfrac{y}{(x-c)^2}$ の最大値を求めよ。ただし，$a>c>0$, $b>0$ とする。

解答



$D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\geqq 1\right\}$ は，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…①

を境界とする右図斜線部分である。ただし，境界線は含む。

$\dfrac{y}{(x-c)^2}=k$ とおき，分母を払うと，$y=k(x-c)^2$　…②

これは，頂点 $(c,\ 0)$ の放物線で，D と共有点をもちながら

k の値を変化させると，P で双曲線に接するとき最大になる。

このとき，下に凸の放物線であるから，$k>0$ である。

②上の点として，$\mathrm{P}(t+c,\ kt^2)$ とおくと，これは①上の点でもあるから，

$\dfrac{(t+c)^2}{a^2}-\dfrac{(kt^2)^2}{b^2}=1$　（$a-c<t$　…③）

整理すると，$a^2k^2t^4-b^2(t+c)^2+a^2b^2=0$　…④

④の両辺を t で微分すると，$4a^2k^2t^3-2b^2(t+c)=0$

両辺を 2 で割ると，$2a^2k^2t^3-b^2(t+c)=0$　…⑤

①と②は接するから，④は重解 α をもち，⑤も解 α をもつから，

$a^2k^2\alpha^4-b^2(\alpha+c)^2+a^2b^2=0$　…④′

$2a^2k^2\alpha^3-b^2(\alpha+c)=0$　…⑤′

④′×2 −⑤′× α より，$-b^2(\alpha+c)(\alpha+2c)+2a^2b^2=0$　$b\neq 0$ より，$(\alpha+c)(\alpha+2c)-2a^2=0$

$\alpha^2+3c\alpha+2c^2-2a^2=0$　$\alpha=\dfrac{-3c\pm\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$

③より，$t=\alpha=\dfrac{-3c+\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$　…⑥

⑤より，$k^2=\dfrac{b^2(t+c)}{2a^2t^3}$　$k>0$ より，$k=\dfrac{b}{at}\sqrt{\dfrac{t+c}{2t}}=\dfrac{b\left(3c+\sqrt{8a^2+c^2}\right)\sqrt{4a^2-c^2+c\sqrt{8a^2+c^2}}}{8\sqrt{2}\,a(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}$

⑥のとき，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$x=t+c=\dfrac{-c+\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$

$y=kt^2=\dfrac{b\sqrt{2a^2+c^2-c\sqrt{8a^2+c^2}}}{\sqrt{2}\,a}$

よって，$x=\dfrac{-c+\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$，$y=\dfrac{b\sqrt{2a^2+c^2-c\sqrt{8a^2+c^2}}}{\sqrt{2}\,a}$ のとき，

最大値 $\dfrac{b(3c+\sqrt{8a^2+c^2})\sqrt{4a^2-c^2+c\sqrt{8a^2+c^2}}}{8\sqrt{2}\,a(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}$　答

例題　実数 x，y が $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}\geqq 1$ を満たすとき，$\dfrac{4y}{(2x-1)^2}$ の最大値を求めよ。

$\dfrac{4y}{(2x-1)^2}=\dfrac{y}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ である。

$\dfrac{y}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ の最大値は，$a=3$，$b=\sqrt{7}$，$c=\dfrac{1}{2}$ のときであるから，$x=4$，$y=\dfrac{7}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{4}{21}$　答

補足　設問1の類題1，2の結果をまとめると，

$x=\dfrac{-c+\sqrt{8a^2+c^2}}{2}$，$y=\dfrac{b\sqrt{|2a^2+c^2-c\sqrt{8a^2+c^2}|}}{\sqrt{2}\,a}$ のとき，

最大値は，$\dfrac{b(3c+\sqrt{8a^2+c^2})\sqrt{4a^2-c^2+c\sqrt{8a^2+c^2}}}{8\sqrt{2}\,a|a^2-c^2|^{\frac{3}{2}}}$ となる。

(2025/5/26　ジョーカー)