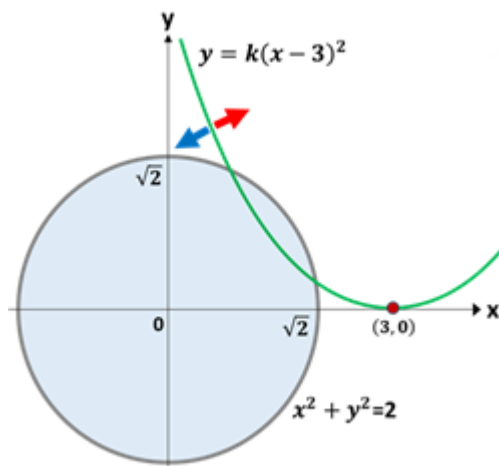


設問1 条件 $x^2 + y^2 \leq 2$ が示す領域は半径 $\sqrt{2}$ の円の内部です。関数に最大値 k が存在するとして、

$$\frac{y}{(x-3)^2} = k \Rightarrow y = k(x-3)^2$$

と変形すると、頂点 $(3,0)$ の二次関数と捉えることができます。



これを図示すると、左図のようになります。

k が大きいと赤矢印に小さいと青矢印の方向に移動しますが、最も大きくなれるのは、二次関数と円が一点で接する場合です。つまり、

$$x^2 + y^2 = 2 \dots \textcircled{1}$$

$$y = k(x-3)^2 \dots \textcircled{2}$$

を満たすときです。接点の x, y の座標値は区間 $(0, \sqrt{2})$ の中にあるので、 $\textcircled{1}$ 式は $y = \sqrt{2-x^2}$ と変形でき、これを $\textcircled{2}$ に代入して、

$$\sqrt{2-x^2} = k(x-3)^2 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2-x^2}}{(x-3)^2}$$

です。この式の増減を調べれば、最大値を知ることができます。

$$g(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{(x-3)^2}$$

において、 x で微分すると、

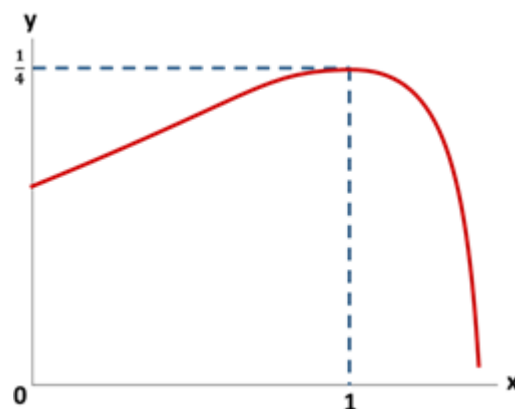
$$g(x)' = -\frac{(x-1)(x+4)\sqrt{2-x^2}}{(x-3)^3(x^2-2)}$$

となります。

すると、 $(0, \sqrt{2})$ の範囲で $g(x)' = 0$ の解は、 $x = 1$ ですから、増減表は以下の通りです。

x	$\dots$	1	$\dots$
$g(x)'$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

$x = 1$ のとき、 y は $x^2 + y^2 = 2$ から $y = 1$ と求められます。



以上より、 $x = y = 1$ のとき $\frac{y}{(x-3)^2}$ の最大値は $\frac{1}{4}$ です。

設問2 与式はシンメトリです。必ずしもそうなるとは限りませんが、 $x = y$ のときに、最小値・最大値をとる出題が多いので、補足に示した試行をやってみます。そうすると、

$$x = y = \frac{1}{2} \text{ のとき、最小値 } 3$$

であることが予想できます。

この試行を念頭に置いて、次式で $F(x, y)$ を定義して、 $F(x, y) \geq 0$ を示します。

$$F(x, y) = \text{与式} - 3 = \frac{4(x^3 + y^3) + 8}{x + y + 2} - 3 = \frac{4x^3 - 3x + 4y^3 - 3y + 2}{x + y + 2}$$

すると、分母 > 0 なので、 $F(x, y)$ の符号は分子に依存することがわかります。分子は $4t^3 - 3t + 1$ の形をしているので、

$$4t^3 - 3t + 1 = (t + 1)(2t - 1)^2$$

と変形すると、 $t > 0$ の範囲では、 $t = \frac{1}{2}$ のときに最小値0をとります。

以上より、 $x = y = \frac{1}{2}$ のとき、最小値3です。

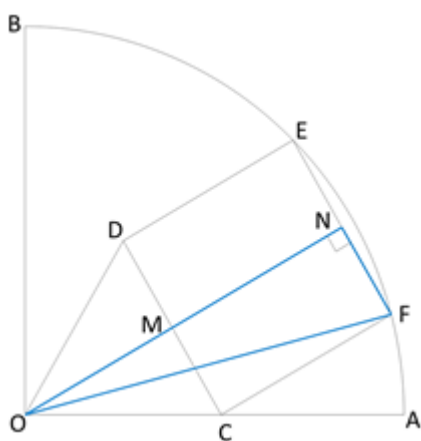
補足 $x = y$ のとき、 $\frac{4(x^3+y^3)+8}{x+y+2}$ の最小値

与式で、 $x = y$ とすると、

$$\frac{4(x^3 + y^3) + 8}{x + y + 2} = 4x^2 - 4x + 4 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

となりますから、 $x = y = \frac{1}{2}$ のとき、最小値3です。

追加問題1



図のように、各点に記号を付けます。ただし、M,NはそれぞれCD,EFの midpoint とします。正方形と正三角形の一辺の長さを a とし、 $\triangle OFN$ に三平方の定理を適用すると、

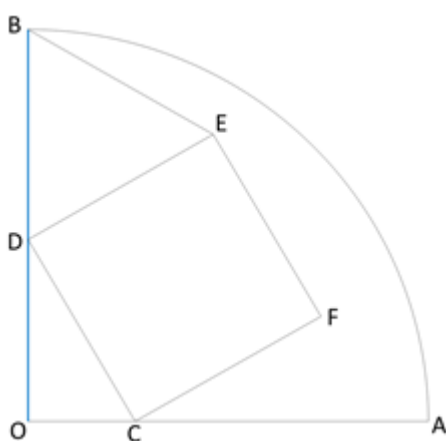
$$ON^2 + NF^2 = OF^2 \Rightarrow (OM + MN)^2 + NF^2 = OF^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} OC + MN \right)^2 + \left(\frac{EF}{2} \right)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a + a \right)^2 + \left(\frac{1}{2} a \right)^2 = 1^2 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

です。ここで、 $a > 0$ なので、一辺の長さは $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ です。

追加問題2



図のように、各点に記号を付けます。正方形と正三角形の一辺の長さを a とすると、

$$OD + DB = OB \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} CD + DB = OB$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} a + a = 1 \Rightarrow a = 4 - 2\sqrt{3}$$

です。よって、一辺の長さは $4 - 2\sqrt{3}$ です。