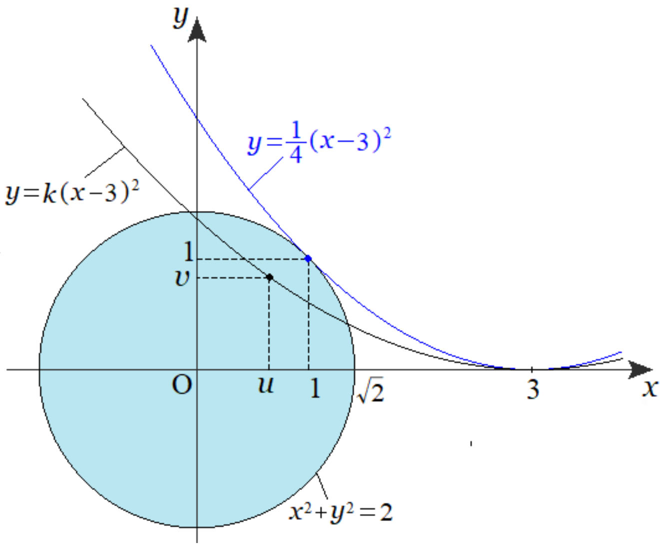
● 問題 455 解答＜三角定規＞



［設問１］

$x^2+y^2 \leqq 2$ …①, $\dfrac{y}{(x-3)^2}=k$ …②　と置く。

②より　$y=k(x-3)^2$ …②′

放物線②′は k が増加すると上方に移動するから，①②′を満たす点 $(x, y)=(u, v)$ が k の最大値を与えるとき，それは②′が①の境界

$x^2+y^2=2$ …③

と接するときである。

③，②′の両辺を微分して，

$x+yy'=0$, $y'=2k(x-3)^2$

以上より，

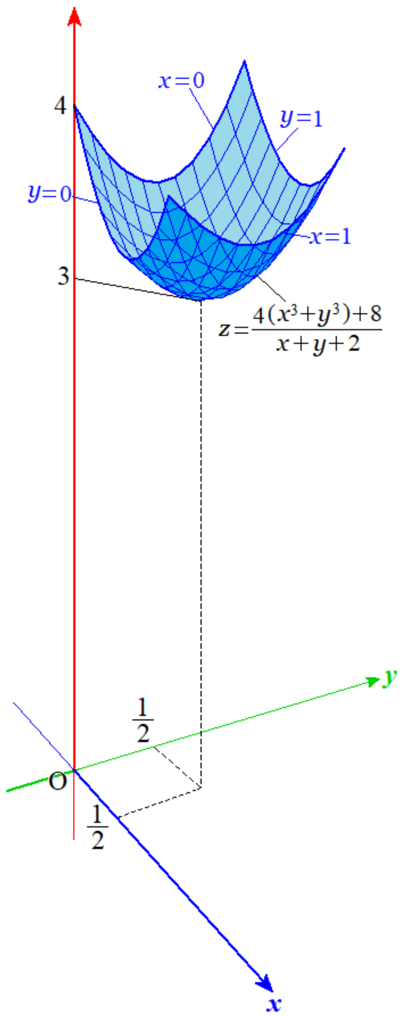
$u^2+v^2=2$ …④,　$\dfrac{v}{(u-3)^2}=k$ …⑤,　$u+v \cdot 2k(u-3)=0$ …⑥

⑤⑥より，$u+\dfrac{2v^2}{u-3}=0$　$\therefore$　$u(u-3)+2(2-u^2)=0$ ($\because$④)

$\therefore$　$u^2+3u-4=(u+4)(u-1)=0$　$\therefore$　$u=1$　($\because$④より $u+4>0$)

このとき，⑤より $v>0$, $k>0$ として良いので，$v=1$, $k=\dfrac{1}{4}$。

以上より，求める②の最大値は $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ …[答]



［設問２］

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z=\dfrac{4(x^3+y^3)+8}{x+y+2}$ …①

$x+y=u$, $x-y=v$ と置くと，$x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{u-v}{2}$ …②

②を①に代入し整理すると，

$z=\dfrac{u^3+3uv^2+8}{u+8}=u^2-2u+4+\dfrac{3u}{u+2} \cdot v^2$ …③

$u \geqq 0$ で③の第４項は $\geqq 0$ だから，$z \geqq u^2-2u+4=(u-1)^2+3 \geqq 3$

等号は $u=1$, $v=0$, すなわち $x=y=\dfrac{1}{2}$ のときに成立する。

以上より，求める①の最小値は，$x=y=\dfrac{1}{2}$ のときの $\mathbf{3}$ 。…[答]

《追加問題》

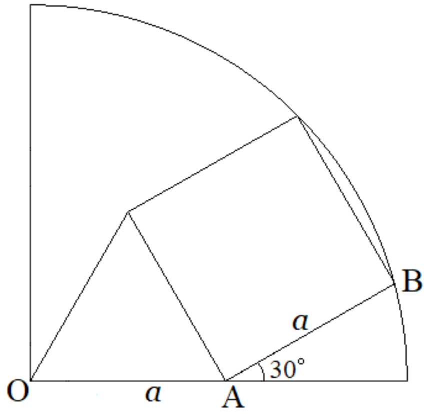
［問題１］

求める 1 辺の長さを a とすると, 図の B 点が円周上にあるから,

$$\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=1$$

整理して， $a^2=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$$\therefore\ a=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}\quad (=0.517\cdots\ )\ \cdots[答]$$



［問題２］

求める 1 辺の長さを a とすると, 右図より

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=1\quad \therefore\ a=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\boldsymbol{2(2-\sqrt{3})}\quad (=0.535\cdots)\ [答]$$