

455. 設問1. 2024次方程式

$$x^{2024} + 2x^{2023} + 3x^{2022} + \dots + 2025 = 0 \dots \textcircled{1}$$

において、 $x=0$ とすると、 $2025=0$ となり、矛盾する.

$$\therefore x \neq 0$$

①の両辺を x^{2024} ($\neq 0$) で割ると,

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + 2025 \cdot \frac{1}{x^{2024}} = 0$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ とすると,}$$

$$1 + 2y + 3y^2 + \dots + 2025y^{2024} = 0 \dots \textcircled{2}$$

①の解が、 $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2024}$ なので、 y の方程式②の解は,

$$y = \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \dots, \frac{1}{\alpha_{2024}}$$

故に②の左辺は、次のように因数分解される.

$$2025 \left(y - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left(y - \frac{1}{\alpha_2} \right) \left(y - \frac{1}{\alpha_3} \right) \dots \left(y - \frac{1}{\alpha_{2024}} \right)$$

以上の結果より,

$$\begin{aligned} & \frac{x^{2024} + 2x^{2023} + 3x^{2022} + \dots + 2025}{x^{2024}} \\ &= 2025 \left(y - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left(y - \frac{1}{\alpha_2} \right) \left(y - \frac{1}{\alpha_3} \right) \dots \left(y - \frac{1}{\alpha_{2024}} \right) \end{aligned} \dots \textcircled{3}$$

$x=1$ とすると、 $y=1$ であり、③より,

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + 2025 \\ &= 2025 \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_3} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{\alpha_{2024}} \right) \\ \therefore & \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_3} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{\alpha_{2024}} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2025 \cdot (2025 + 1)}{2025} = 1013 \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

設問2. 2025次方程式

$$x^{2025} - 10x - 4 = 0 \dots \textcircled{1}$$

の解が $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2025}$ であるから、解と係数の関係より、

$$\sum_{k=1}^{2025} \alpha_k = 0 \cdots \textcircled{2}$$

また、①より、 $x^{2025} = 10x + 4$

$x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2025}$ を代入すると、

$$\alpha_1^{2025} = 10\alpha_1 + 4$$

$$\alpha_2^{2025} = 10\alpha_2 + 4$$

$$\alpha_3^{2025} = 10\alpha_3 + 4$$

$\cdots$

$$\alpha_{2025}^{2025} = 10\alpha_{2025} + 4$$

辺々を加えると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2025} \alpha_k^{2025} &= 10 \sum_{k=1}^{2025} \alpha_k + 4 \sum_{k=1}^{2025} 1 = 10 \cdot 0 + 4 \cdot 2025 \\ &= 8100 \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

設問3. $f(x) = x^{11} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ とすると、 $f(-1) = 0$

故に $f(x)$ は $x + 1$ で割り切れる.

また、1の虚数立方根を ω とすると、 $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\therefore f(\omega) = \omega^{11} + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega + 1 = 2(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

また、

$$f(\omega^2) = \overline{f(\omega)} = \overline{0} = 0$$

故に $f(x)$ は、

$$(x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 - (\omega + \omega^2)x + \omega^3 = x^2 + x + 1$$

で割り切れる.

次に、

$$f(-\omega) = -\omega^{11} + \omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 1 = -\omega^2 + \omega - 1 + \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$f(-\omega^2) = \overline{f(-\omega)} = \overline{0} = 0$$

故に $f(x)$ は、

$$(x + \omega)(x + \omega^2) = x^2 + (\omega + \omega^2)x + \omega^3 = x^2 - x + 1$$

で割り切れる.

故に $f(x)$ は、

$$\begin{aligned} (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= (x + 1)(x^4 + x^2 + 1) \\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

で割り切れる.

$$\begin{array}{r}
 x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \overline{) \begin{array}{l} x^6 - x^5 + 1 \\ x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 \\ -x^{10} - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 \\ -x^{10} - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 - x^5 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \hline 0 \end{array}} \\
 \end{array}$$

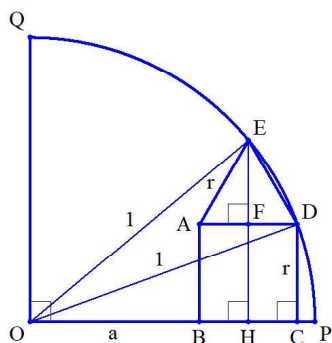
$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^5+1) \cdots \quad (\text{答})$$

問題1. 図の四分の一円OPQ、正方形ABCD、正三角形EADにおいて、

$$AB = BC = CD = DA = AE = ED = r, \quad OB = a$$

とする.

EからOPに垂線EHを下ろし、ADとEHの交点をFとする.



直角三角形DOCにおいて、 $OC = OB + BC = a + r$,

$$OC^2 + CD^2 = OD^2$$

$$\therefore (a+r)^2 + r^2 = 1^2 \quad \therefore a^2 + 2ar + 2r^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

直角三角形EOHにおいて、

$$OH = OB + BH = a + \frac{r}{2},$$

$$EH = EF + FH = \frac{\sqrt{3}}{2}r + r = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}r,$$

$$OH^2 + EH^2 = OE^2$$

$$\therefore \left(a + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}r\right)^2 = 1^2$$

$$\therefore a^2 + ar + \frac{r^2}{4} + \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4}r^2 = 1$$

$$\therefore a^2 + ar + (2 + \sqrt{3})r^2 = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より, } ar - \sqrt{3}r^2 = 0$$

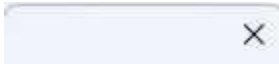
$$r \neq 0 \text{より, } a = \sqrt{3}r \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{に代入すると, } 3r^2 + 2\sqrt{3}r^2 + 2r^2 = 1$$

$$\therefore r^2 = \frac{1}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{13}$$

$$r > 0 \text{より, } r = \sqrt{(5 - 2\sqrt{3})/13} \dots (\text{答})$$

問題2. VBSCRIPTで解いてみた.



0.517638090205043

小数第6位までは信用できる値であろう.



```
Px=1:Py=0
```

```
pi=4*atn(1):t=-pi*.5-pi/3
```

```
m=100:k=.01
```

```
for dankai=1 to 12
```

```
  if dankai=1 then
```

```
    a1=k:a2=pi*.5-k
```

```
  else
```

```
    a1=aa-k:a2=aa+k:k=k*.1
```

```
  end if
```

```
  for a=a1 to a2 step k
```

```
    Dx=cos(a):Dy=sin(a)
```

```
    Ax=(Px-Dx)*cos(t)-(Py-Dy)*sin(t)+Dx
```

```
    Ay=(Px-Dx)*sin(t)+(Py-Dy)*cos(t)+Dy
```

```
    p=Ay/Ax'OA:y=(Ay/Ax)*x=p*x
```

```
' :OPQ:x^2+y^2=1 -> x^2+(p*x)^2=1 -> (1+p^2)*x^2=1
```

```
    Adx=1/sqr(1+p*p):Ady=p*Adx
```

```
    s=sqr((Adx-Ax)*(Adx-Ax)+(Ady-Ay)*(Ady-Ay))
```

```
  if m>s then
```

```
    m=s:aa=a
```

```
    kotae=sqr((Px-Dx)*(Px-Dx)+(Py-Dy)*(Py-Dy))
```

```
        end if
    next
next
msgbox kotae
```