問題３．（追記）x^6-x^5+1はこれ以上因数分解できないと簡単に判断するのは，抵抗があるので，少しもがいてみる．

例えば，

$$(x^2+x-1)(x^4+x-1)$$
$$=x^6+x^5-x^4+x^3-2x+1\cdots①$$

である．

最初に①の右辺を見せられても，その因数の１つであるx^2+x-1は分からない．

したがって，

$$x^6+x^5-x^4+x^3-2x+1$$
$$=(x^2+ax\pm1)(x^4+bx^3+cx^2+dx\pm1)\text{（複号同順）}$$

として，係数a，b，c，dを求めるか，あるいは，

$x^6+x^5-x^4+x^3-2x+1$を$x^2+ax\pm1$で割り切れることから，aの方程式を求める，のいずれかの解き方が考えられる．

正確には，

$$x^6+x^5-x^4+x^3-2x+1$$
$$=(x^2+ax+b)\left(x^4+cx^3+dx^2+ex+\frac{1}{b}\right)\quad(b\neq0)$$

とすべきであろうが，これだと，変数がa，b，c，d，eと５個となり，実質上解くことはできないだろう．

x^6-x^5+1が$x^2+ax\pm1$（aは有理数）で割り切れるとする．

i)．x^2+ax+1で割り切れるとき，

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & -a-1 & a^2+a-1 & -a^3-a^2+2a+1 & a^4+a^3-3a^2-2a+1 & & \\
\hline
1\ \ a\ \ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
 & 1 & a & 1 & & & & \\
\hline
 & & -a-1 & -1 & 0 & & & \\
 & & -a-1 & -a^2-a & -a-1 & & & \\
\hline
 & & & a^2+a-1 & a+1 & 0 & & \\
 & & & a^2+a-1 & a^3+a^2-a & a^2+a-1 & & \\
\hline
 & & & & -a^3-a^2+2a+1 & -a^2-a+1 & 0 & \\
 & & & & -a^3-a^2+2a+1 & -a^4-a^3+2a^2+a & -a^3-a^2+2a+1 & \\
\hline
 & & & & & a^4+a^3-3a^2-2a+1 & a^3+a^2-2a-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
a^4+a^3-3a^2-2a+1 & a^3+a^2-2a-1 & 1\\
a^4+a^3-3a^2-2a+1 & a^5+a^4-3a^3-2a^2+a & a^4+a^3-3a^2-2a+1\\
\hline
 & -a^5-a^4+4a^3+3a^2-3a-1 & -a^4-a^3+3a^2+2a
\end{array}$$

$$\therefore -a^5-a^4+4a^3+3a^2-3a-1=0\cdots②$$
$$-a^4-a^3+3a^2+2a=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②において，$a=0$とすると，$-1=0$となり，矛盾する．

$\therefore a \neq 0$

③より，$a^3 + a^2 - 3a - 2 = 0$

$\therefore (a+2)(a^2 - a - 1) = 0$

aは有理数なので，$a = -2$

これは，②を満たさない．

ii)．$x^2 + ax - 1$で割り切れるとき，

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & -a-1 & a^2+a+1 & -a^3-a^2-2a-1 & a^4+a^3+3a^2+2a+1 & & \\
\hline
1 \quad a \quad -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 1 & a & -1 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & -a-1 & 1 & 0 & & & \\
 & & -a-1 & -a^2-a & a+1 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & a^2+a+1 & -a-1 & 0 & & \\
 & & & a^2+a+1 & a^3+a^2+a & -a^2-a-1 & & \\
\cline{4-7}
 & & & & -a^3-a^2-2a-1 & a^2+a+1 & 0 & \\
 & & & & -a^3-a^2-2a-1 & -a^4-a^3-2a^2-a & a^3+a^2+2a+1 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & a^4+a^3+3a^2+2a+1 & -a^3-a^2-2a-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr}
a^4+a^3+3a^2+2a+1 & -a^3-a^2-2a-1 & 1 \\
a^4+a^3+3a^2+2a+1 & a^5+a^4+3a^3+2a^2+a & -a^4-a^3-3a^2-2a-1 \\
\hline
 & -a^5-a^4-4a^3-3a^2-3a-1 & a^4+a^3+3a^2+2a+2
\end{array}
$$

$\therefore -a^5 - a^4 - 4a^3 - 3a^2 - 3a - 1 = 0$・・・④

$a^4 + a^3 + 3a^2 + 2a + 2 = 0$ ・・・・・・・・⑤

④において，$a \geqq 0$とすると，(負の数)$=0$となり，矛盾するので，$a < 0$

④の左辺を$f(a)$とすると，$f(-1) \neq 0$

故に④は，因数定理では解けない．

⑤の左辺を$g(a)$とすると，$g(-1) \neq 0$，$g(-2) \neq 0$

故に⑤も，因数定理では解けない．

$x^6 - x^5 + 1$は，もうこれ以上因数分解はできないと考えてよいだろう．

しかしもう少し，もがいてみる．

例えば，

$(x^3 + x + 1)(x^3 + 2x - 2)$

$= x^6 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 - 2$・・・⑥

である．

最初に⑥の右辺を見せられても，その因数の１つである$x^3 + x + 1$は分からない．

したがって，

$x^6 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 - 2$

$= (x^3 + ax^2 + bx \pm 1)(x^3 + cx^2 + dx \mp 2)$ (複号同順)

として，係数ａ，ｂ，ｃ，ｄを求めるか，あるいは，
$x^6+3x^4-x^3-2x^2-2$ を $x^3+ax^2+bx\pm1$ で割り切れることから，ａ，ｂの連立方程式を求める，のいずれかの解き方が考えられる．実質上解くことはできないと考えてよいだろう．