第 456 回

設問 1

高次方程式 $x^{2024}+2x^{2023}+3x^{2022}+\cdots+2024x+2025=0$ の 2024 個の解を α_k （$k=1, 2, 3, \cdots, 2024$）とおくとき，$\left(1-\dfrac{1}{\alpha_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{\alpha_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{\alpha_3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{\alpha_{2024}}\right)$ の値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$2025t^{2024}+2024t^{2023}+2023t^{2022}+\cdots+2t+1=0$

$\dfrac{1}{\alpha_k}=\beta_k$ （$k=1, 2, 3, \cdots, 2024$）とおくと，

$\left(1-\dfrac{1}{\alpha_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{\alpha_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{\alpha_3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{\alpha_{2024}}\right)=(1-\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_3)\cdots(1-\beta_{2024})$ である。

また，$f(t)=2025t^{2024}+2024t^{2023}+2023t^{2022}+\cdots+2t+1$ とおくと，

$f(t)=2025(t-\beta_1)(t-\beta_2)(t-\beta_3)\cdots(t-\beta_{2024})$ と表すことができる。

$t=1$ とすると，$f(1)=\dfrac{1}{2}\cdot2025\cdot2026=2025\cdot1013$

また，$f(1)=2025(1-\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_3)\cdots(1-\beta_{2024})$ より，

$\therefore (1-\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_3)\cdots(1-\beta_{2024})=\dfrac{f(1)}{2025}=\dfrac{2025\cdot1013}{2025}=1013$

よって，$\left(1-\dfrac{1}{\alpha_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{\alpha_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{\alpha_3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{\alpha_{2024}}\right)=(1-\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_3)\cdots(1-\beta_{2024})=1013$　答

設問 2

高次方程式 $x^{2025}-10x-4=0$ の 2025 個の解を α_k （$k=1, 2, 3, \cdots, 2025$）とおくとき，$\sum_{k=1}^{2025}{\alpha_k}^{2025}$ の値を求めよ。

解答　α_k （$k=1, 2, 3, \cdots, 2025$）は $x^{2025}-10x-4=0$ の解だから，${\alpha_k}^{2025}-10\alpha_k-4=0$

$\therefore {\alpha_k}^{2025}=10\alpha_k+4$ である。

また，解と係数の関係により，$\sum_{k=1}^{2025}\alpha_k=0$

よって，$\sum_{k=1}^{2025}{\alpha_k}^{2025}=\sum_{k=1}^{2025}(10\alpha_k+4)=10\sum_{k=1}^{2025}\alpha_k+\sum_{k=1}^{2025}4=10\cdot0+4\cdot2025=8100$　答

設問 3

高次多項式 $x^{11}+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を因数分解せよ。

解答　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を利用する。

与式$=x^2(x^9+1)+x(x^3+1)+x^3+1$　　※ $x^9+1=(x^3)^3+1$

$=(x^3+1)\{x^2(x^6-x^3+1)+x+1\}$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x^8-x^5+x^2+x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)\{x^5(x^3-1)+x^2+x+1\}$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)\{x^5(x-1)+1\}$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6-x^5+1)$ 答

補足 x^6-x^5+1 は有理数の範囲で因数分解できない。

証明 $f(x)=x^6-x^5+1$ とおくと，$f(-1)\fallingdotseq 0$，$f(1)\fallingdotseq 0$ であるから，$x+1$，$x-1$ は因数にもたない。
したがって，1 次式の因数はもたないから，因数分解できるとすれば，3 次式と 3 次式の積あるいは 2 次式と 4 次式の積である。

[1] $f(x)=(x^3+ax^2+bx+1)\{x^3-(a+1)x^2+cx+1\}$ とおくと，

$f(x)=x^6-x^5+(-a-a^2+b+c)x^4+(2-b-ab+ac)x^3+(-1+bc)x^2+(b+c)x+1$

係数を比較して，$\begin{cases} -a-a^2+b+c=0 & \cdots(1-1) \\ 2-b-ab+ac=0 & \cdots(1-2) \\ -1+bc=0 & \cdots(1-3) \\ b+c=0 & \cdots(1-4) \end{cases}$

$(1-3)$，$(1-4)$ から，c を消去すると，$b^2=-1$

これは実数解をもたない。　∴ [1] の形に因数分解できない。

[2] $f(x)=(x^3+ax^2+bx-1)\{x^3-(a+1)x^2+cx-1\}$ とおくと，

$f(x)=x^6-x^5+(-a-a^2+b+c)x^4+(-2-b-ab+ac)x^3+(1+bc)x^2+(-b-c)x+1$

係数を比較して，$\begin{cases} -a-a^2+b+c=0 & \cdots(2-1) \\ -2-b-ab+ac=0 & \cdots(2-2) \\ 1+bc=0 & \cdots(2-3) \\ -b-c=0 & \cdots(2-4) \end{cases}$

$(2-3)$，$(2-4)$ から，b を消去すると，$b^2=1$　$\therefore b=\pm 1$　$(b,\ c)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$

$(2-1)$ より，$(a,\ b,\ c)=(0,\ 1,\ -1)$，$(0,\ -1,\ 1)$，$(-1,\ 1,\ -1)$，$(-1,\ -1,\ 1)$

これらは，どれも $(2-2)$ を満たさない。　∴ [2] の形に因数分解できない。

[3] $f(x)=(x^2+ax+1)\{x^4-(a+1)x^3+bx^2+cx+1\}$ とおくと，

$f(x)=x^6-x^5+(1-a-a^2+b)x^4+(-1-a+ab+c)x^3+(1+b+ac)x^2+(a+c)x+1$

係数を比較して，$\begin{cases} 1-a-a^2+b=0 & \cdots(3-1) \\ -1-a+ab+c=0 & \cdots(3-2) \\ 1+b+ac=0 & \cdots(3-3) \\ a+c=0 & \cdots(3-4) \end{cases}$

$(3-1)$, $(3-3)$, $(3-4)$ を連立させて，$(a,\ b,\ c)=(0,\ -1,\ 0)$

これは，$(3-2)$ を満たさない。　∴ [3] の形に因数分解できない。

[4] $f(x)=(x^2+ax-1)\{x^4-(a+1)x^3+bx^2+cx-1\}$ とおくと，

$f(x)=x^6-x^5+(-1-a-a^2+b)x^4+(1+a+ab+c)x^3+(-1-b+ac)x^2+(-a-c)x+1$

係数を比較して，$\begin{cases} -1-a-a^2+b=0 & \cdots(4-1) \\ 1+a+ab+c=0 & \cdots(4-2) \\ -1-b+ac=0 & \cdots(4-3) \\ a+c=0 & \cdots(4-4) \end{cases}$

$(4-1)$, $(4-3)$, $(4-4)$ から b, c を消去すると，$2a^2+a+2=0$　　$D=1^2-4\cdot 2\cdot 2<0$

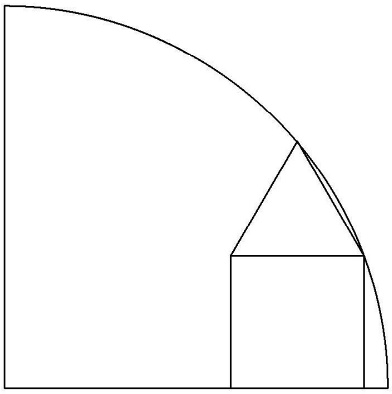
これは実数解をもたない。　∴[4]の形に因数分解できない。

以上，[1]～[4]より，$f(x)$ は有理数の係数の範囲で，3次式と3次式の積あるいは2次式と4次式の積で表すことはできない。

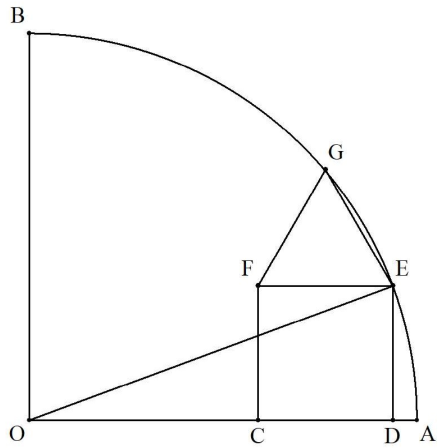
よって，x^6-x^5+1 は有理数の係数の範囲で因数分解できない。　終

追加問題 1

半径1の四分円内に，図のように
正方形と正三角形が配置されている。
1辺の長さを求めよ。



解答　1辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。



△EODについて，EO＝1，DE＝a であるから，

三平方の定理により，OD＝$\sqrt{1^2-a^2}=\sqrt{1-a^2}$

与えられた図形を複素平面上に置く。O(0)，A(1)，B(i)である。

D(d)，E(e)，G(g)とおくと，$d=\sqrt{1-a^2}$，$e=\sqrt{1-a^2}+ai$

G＝rot(D，E，150°)であるから，(*)

$$g-e=(d-e)(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)=(d-e)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$g=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)e+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)d$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\sqrt{1-a^2}+ai\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\sqrt{1-a^2}$$

$$=\frac{-a+2\sqrt{1-a^2}}{2}+\frac{(2+\sqrt{3})a}{2}i$$

$|g|=1$ より，$\left(\frac{-a+2\sqrt{1-a^2}}{2}\right)^2+\left\{\frac{(2+\sqrt{3})a}{2}\right\}^2=1$

整理すると，$a\left\{(1+\sqrt{3})a-\sqrt{1-a^2}\right\}=0$

$a\fallingdotseq 0$ より，$(1+\sqrt{3})a=\sqrt{1-a^2}$

両辺を2乗して整理すると，$(5+2\sqrt{3})a^2=1$　　$a^2=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$

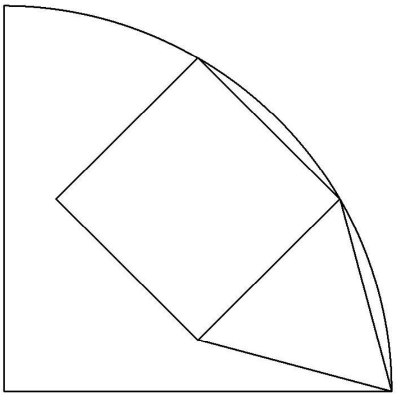
$a>0$ より，$a=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{13}}$　（$\fallingdotseq 0.343724$）

よって，求める1辺の長さは，$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{13}}$　答

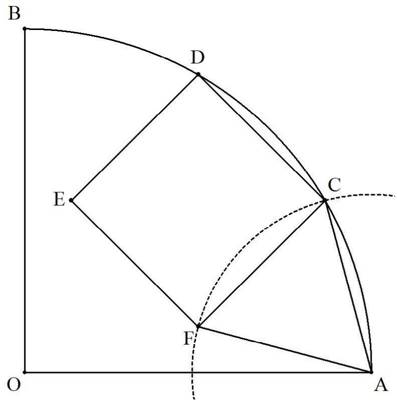
(*)　G＝rot(D，E，150°)とは，Gは，DをE中心に150°だけ回転させた点を表す。（Grapesに倣う。）

追加問題 2

半径 1 の四分円内に，図のように
正方形と正三角形が配置されている。
1 辺の長さを求めよ。



解答　1 辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。



まず，与えられた図形を座標平面の第 1 象限上に置く。

O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ である。

中心A，半径 a の円：$(x-1)^2+y^2=a^2$　…①

四分の一円の方程式：$x^2+y^2=1$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$　…②

①，②の交点がCである。

①，②を連立させて解くと，C$\left(\dfrac{2-a^2}{2},\ \dfrac{a\sqrt{4-a^2}}{2}\right)$

ここから，与えられた図形を複素平面において考える。

O(0)，A(1)，B(i) である。

C(c)，D(d) とおくと，$c=\dfrac{2-a^2}{2}+\dfrac{a\sqrt{4-a^2}}{2}i$ である。

D$=rot(\mathrm{A},\ \mathrm{C},\ -150^\circ)$ であるから，

$$d-c=(1-c)\{\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ)\}=(1-c)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$d=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)c+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{2-a^2}{2}+\frac{a\sqrt{4-a^2}}{2}i\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{4-(2+\sqrt{3})a^2-a\sqrt{4-a^2}}{4}+\frac{-a^2+(2+\sqrt{3})a\sqrt{4-a^2}}{4}i$$

$|d|=1$ より，$\left\{\dfrac{4-(2+\sqrt{3})a^2-a\sqrt{4-a^2}}{4}\right\}^2+\left\{\dfrac{-a^2+(2+\sqrt{3})a\sqrt{4-a^2}}{4}\right\}^2=1$

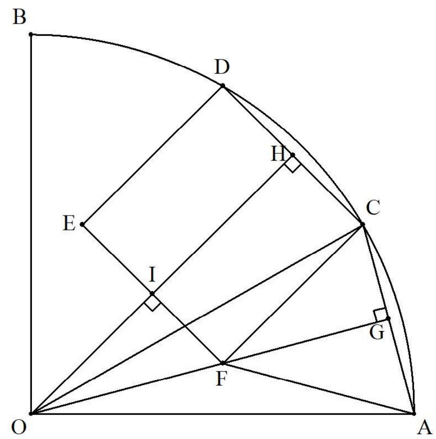
整理すると，$\dfrac{1}{2}a\left\{(2+\sqrt{3})a-\sqrt{4-a^2}\right\}=0$

$a \fallingdotseq 0$ より，$(2+\sqrt{3})a=\sqrt{4-a^2}$

両辺を 2 乗して整理すると，$(2+\sqrt{3})a^2=1$　$a^2=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$a>0$ より，$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　（$\fallingdotseq 0.517638$）

よって，求める１辺の長さは，$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　答



別解　１辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。

△CFG は３辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形であるから，$\mathrm{FG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

△COG について，$\mathrm{CO}=1$，$\mathrm{GC}=\dfrac{a}{2}$ であるから，

三平方の定理により，$\mathrm{OG}=\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}$

$\mathrm{OF}=\mathrm{OG}-\mathrm{FG}=\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{3}a}{2}$　…①

また，△COH≡△COG より，$\mathrm{OH}=\mathrm{OG}=\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}$

△FOI について，$\mathrm{OI}=\mathrm{OH}-\mathrm{IH}=\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}-a=\dfrac{\sqrt{4-a^2}-2a}{2}$，$\mathrm{IF}=\dfrac{a}{2}$ であるから，

三平方の定理により，$\mathrm{OF}^2=\left(\dfrac{\sqrt{4-a^2}-2a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

これに①を代入すると，$\left(\dfrac{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{3}a}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{4-a^2}-2a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

整理すると，$(2-\sqrt{3})a\sqrt{4-a^2}=a^2$

$a\fallingdotseq 0$ ではないから…

両辺を２乗すると，$a^2=2-\sqrt{3}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$a>0$ より，$a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　（$\fallingdotseq 0.517638$）

よって，求める１辺の長さは，$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　答

（2025/6/22　ジョーカー）