

設問1 高次方程式を $P(x)$ とすると、因数定理により、

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_{2024})$$

と表すことができます。一方、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\alpha_{2024}}\right) = \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) \cdots (\alpha_{2024} - 1)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2024}} \\ &= \frac{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3) \cdots (1 - \alpha_{2024})}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2024}} \end{aligned}$$

ここで、分子は $P(x)$ に $x = 1$ を代入したものと同一なので、 $P(x) = x^{2024} + 2x^{2023} + 3x^{2022} + \cdots + 2025$ という元の定義式から、分子を直接計算すると、

$$\text{分子} = P(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2025 = 2051325$$

となります。一方、分母は解と係数の関係より、すべての解の積で、

$$\text{分母} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2024} = (-1)^{2024} \frac{2025}{1} = 2025$$

となります。よって、

$$\text{与式} = \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{P(1)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2024}} = \frac{2051325}{2025} = 1013$$

です。

設問2 $x^{2025} - 10x - 4 = 0 \Rightarrow x^{2025} = 10x + 4$ なので、

$$\sum_{k=1}^{2025} \alpha_k^{2025} = \sum_{k=1}^{2025} (10\alpha_k + 4) = 10 \sum_{k=1}^{2025} \alpha_k + 4 \cdot 2025$$

ここで、解と係数の関係により、

$$\sum_{k=1}^{2025} \alpha_k = \frac{0}{1} = 0$$

なので、

$$\sum_{k=1}^{2025} \alpha_k^{2025} = 10 \cdot 0 + 4 \cdot 2025 = 8100$$

です。

設問3 $P(x) = x^{11} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ とすると、 $P(-1) = 0$ ですが、 -1 の三乗根が $P(x)$ の解の可能性あります。試みに、 $P(x)$ を $x^3 + 1$ で割ってみると、

$$P(x) = (x^3 + 1)(x^8 - x^5 + x^2 + x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^8 - x^5 + x^2 + x + 1)$$

となり、 $x^3 + 1$ が因数であることがわかります。すると、第3項は、

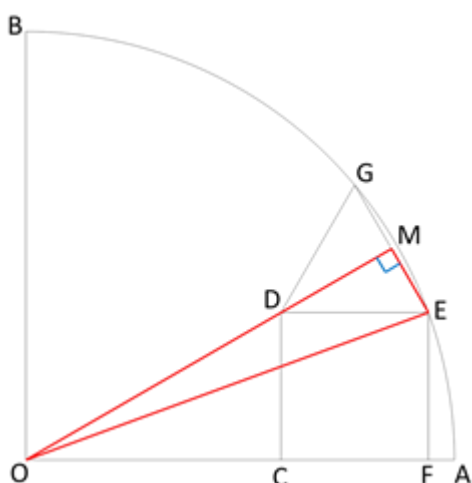
$$\begin{aligned} x^8 - x^5 + x^2 + x + 1 &= x^6(x^2 + x + 1) - (x^7 + x^6 + x^5) + x^2 + x + 1 \\ &= x^6(x^2 + x + 1) - x^5(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + 1) \end{aligned}$$

なので、

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + 1)$$

となります。

追加問題1

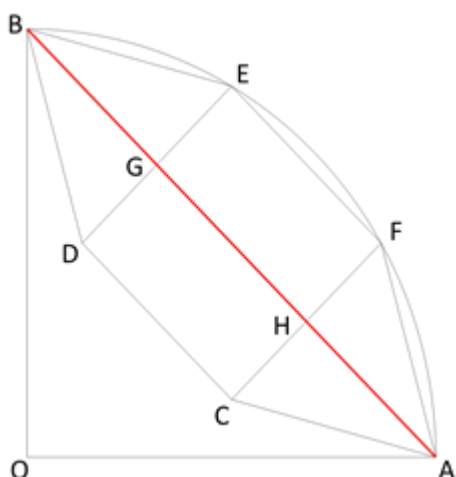


図のように、各点に記号を付けます。ただし、MはEGの中点とします。正方形と正三角形の一辺の長さをaとし、 $\triangle OEM$ に三平方の定理を適用すると、

$$\begin{aligned} OM^2 + EM^2 &= OE^2 \Rightarrow (OD + DM)^2 + EM^2 = OE^2 \\ &\Rightarrow \left(2CD + \frac{\sqrt{3}}{2}DE\right)^2 + \left(\frac{EG}{2}\right)^2 = 1^2 \\ &\Rightarrow \left(2a + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 1^2 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

です。ここで、 $a > 0$ なので、一辺の長さは $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}}$ です。

追加問題2



図のように、各点に記号を付けます。ただし、G,HはそれぞれABとDE,CFの交点とします。正方形と正三角形の一辺の長さをaとすると、

$$\begin{aligned} BG + GH + AH &= AB \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}BD + CD + \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \sqrt{2}OA \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a + a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} \end{aligned}$$

です。よって、一辺の長さは $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$ です。