456解答　よふかしのつらいおじさん

設問1

●低い次数の例で様子を見ます。

偶数次の方程式なので、4次方程式で調べます。

解を、$x=α\_{1},α\_{2},α\_{3},α\_{4}$ とします。

$$x^{4}+n\_{1}x^{3}+n\_{2}x^{2}+n\_{3}x+n\_{4}=\overline{\left(x-α\_{1}\right)\left(x-α\_{2}\right)\left(x-α\_{3}\right)\left(x-α\_{4}\right)}=0$$

下線部を展開すると、

$$\left(x-α\_{1}\right)\left(x-α\_{2}\right)\left(x-α\_{3}\right)\left(x-α\_{4}\right)$$

$$=x^{4}-\left(α\_{1}+α\_{2}+α\_{3}+α\_{4}\right)x^{3}+\left(α\_{1}α\_{2}+α\_{1}α\_{3}+α\_{1}α\_{4}+α\_{2}α\_{3}+α\_{2}α\_{4}+α\_{3}α\_{4}\right)x^{2}$$

$$ -\left(α\_{1}α\_{2}α\_{3}+α\_{1}α\_{2}α\_{4}+α\_{1}α\_{3}α\_{4}+α\_{2}α\_{3}α\_{4}\right)x+α\_{1}α\_{2}α\_{3}α\_{4}$$

$$=x^{4}-\left(1次の基本対称式\right)x^{3}+\left(2次の基本対称式\right)x^{2}-\left(3次の基本対称式\right)x+\left(4次の基本対称式\right)$$

$$=0$$

まとめると、

3次の係数は、$n\_{1}=-\left(1次の基本対称式\right)$

2次の係数は、$n\_{2}=+\left(2次の基本対称式\right)$

1次の係数は、$n\_{3}=-\left(3次の基本対称式\right)$

0次の係数は、$n\_{4}=+\left(4次の基本対称式\right)$

●式を展開します。

$$\left(1-\frac{1}{α\_{1}}\right)\left(1-\frac{1}{α\_{2}}\right)\left(1-\frac{1}{α\_{3}}\right)\left(1-\frac{1}{α\_{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{α\_{1}α\_{2}α\_{3}α\_{4}}\left(α\_{1}-1\right)\left(α\_{2}-1\right)\left(α\_{3}-1\right)\left(α\_{4}-1\right)$$

$$=\frac{1}{α\_{1}α\_{2}α\_{3}α\_{4}}\left\{\begin{array}{c}α\_{1}α\_{2}α\_{3}α\_{4}-\left(α\_{1}α\_{2}α\_{3}+α\_{1}α\_{2}α\_{4}+α\_{1}α\_{3}α\_{4}+α\_{2}α\_{3}α\_{4}\right)\\+\left(α\_{1}α\_{2}+α\_{1}α\_{3}+α\_{1}α\_{4}+α\_{2}α\_{3}+α\_{2}α\_{4}+α\_{3}α\_{4}\right)-\left(α\_{1}+α\_{2}+α\_{3}+α\_{4}\right)+\left(1\right)\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{n\_{4}}\left(n\_{4}+n\_{3}+n\_{2}+n\_{1}+1\right)$$

●問題を考えます。

「次」は基本対称式の次数です。

$$\left(1-\frac{1}{α\_{1}}\right)\left(1-\frac{1}{α\_{2}}\right)\left(1-\frac{1}{α\_{3}}\right)\cdots \cdots \left(1-\frac{1}{α\_{2024}}\right)$$

$$=\frac{1}{α\_{1}α\_{2}α\_{3}\cdots α\_{2024}}\left(α\_{1}-1\right)\left(α\_{2}-1\right)\left(α\_{3}-1\right)\cdots \left(α\_{2024}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2024次}\left\{\left(2024次\right)-\left(2023次\right)+\left(2022次\right)-\cdots -\left(1次\right)+\left(1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2025}\left(2025+2024+2023+\cdots +2+1\right)=\frac{1}{2025}×\frac{\left(2025+1\right)×2025}{2}$$

$$=1013$$

設問2

$$x^{2025}-10x-4=\left(x-α\_{1}\right)\left(x-α\_{2}\right)\left(x-α\_{3}\right)\cdots \left(x-α\_{2025}\right)$$

$$=x^{2025}-\left(1次\right)x^{2024}+\left(2次\right)x^{2023}-\cdots +\left(2024次\right)-\left(2025次\right)$$

上の結果から1次の基本対称式$ \left(α\_{1}+α\_{2}+α\_{3}+\cdots +α\_{2025}\right)=0 $です。

$$x^{2025}-10x-4=0 \rightarrow x^{2025}=10x+4 $$

$$\rightarrow \sum\_{k=1}^{2025}α\_{k}^{2025}=\sum\_{k=1}^{2025}\left(10α\_{k}+4\right)=10\left(α\_{1}+α\_{2}+α\_{3}+\cdots +α\_{2025}\right)+4×2025 $$

$$=10×0+4×2025=8100$$

設問3

$$x^{11}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$$

偶数乗と奇数乗の係数の和が等しいので、$x+1 $が因数です。

$$ x^{11}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$$

$$=\left(x+1\right)\left(x^{10}-x^{9}+x^{8}-x^{7}+x^{6}-x^{5}+x^{4}+x^{2}+1\right)$$

$$=\left(x+1\right)\left(x^{10}+x^{8}+x^{6}-x^{9}-x^{7}-x^{5}+x^{4}+x^{2}+1\right)$$

$$=\left(x+1\right)\left\{x^{6}\left(x^{4}+x^{2}+1\right)-x^{5}\left(x^{4}+x^{2}+1\right)+\left(x^{4}+x^{2}+1\right)\right\}$$

$$=\left(x+1\right)\left(x^{4}+x^{2}+1\right)\left(x^{6}-x^{5}+1\right)$$

$$=\left(x+1\right)\left\{\left(x^{2}+1\right)^{2}-x^{2}\right\}\left(x^{6}-x^{5}+1\right)$$

$$=\left(x+1\right)\left(x^{2}+x+1\right)\left(x^{2}-x+1\right)\left(x^{6}-x^{5}+1\right)$$

追加問題

問題1

図で点Aの座標を $A\left(t,0\right)$、1辺の長さをａとすると、

$$B\left(t,a\right)、C\left(t-\frac{a}{2},a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) です。$$

点Bが原点中心、半径1の円周上にあることから、$t^{2}+a^{2}=1$

よって、$t=\sqrt{1-a^{2}}\left(>0\right) \cdots \left(\#\right)$

点Cも同じ円周上にあるので、

$$\left(t-\frac{a}{2}\right)^{2}+\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^{2}=1 \rightarrow t^{2}-at+\frac{a^{2}}{4}+\frac{7+4\sqrt{3}}{4}a^{2}=1 $$

$$\rightarrow t^{2}-at+\left(2+\sqrt{3}\right)a^{2}-1=0$$

これに(#)を代入すると、

$$t^{2}-at+\left(2+\sqrt{3}\right)a^{2}-1=0 \rightarrow 1-a^{2}-a\sqrt{1-a^{2}}+\left(2+\sqrt{3}\right)a^{2}-1=0 $$

$$\rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)a^{2}=a\sqrt{1-a^{2}} \rightarrow \left(4+2\sqrt{3}\right)a^{2}=1-a^{2} \left(a>0\right) \rightarrow \left(5+2\sqrt{3}\right)a^{2}=1$$

$$\rightarrow a^{2}=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}×\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}=\frac{5-2\sqrt{3}}{13} \rightarrow a=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{13}}=\frac{\sqrt{65-26\sqrt{3}}}{13}\left(=0.3437\cdots \right)$$



問題2

正方形、正三角形の1辺の長さをａとします。

$$すると、LA=\frac{1}{2}a、LC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$OA=1 なので、OL=\sqrt{OA^{2}-LA^{2}}=\sqrt{1^{2}-\left(\frac{a}{2}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{4-a^{2}}}{2}$$

$$OC =OL-LC=\frac{\sqrt{4-a^{2}}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$OM=OLなので、ON=OM-MN=\frac{\sqrt{4-a^{2}}}{2}-a$$

△OCNにピタゴラスの定理を用いると、

$$OC^{2}=CN^{2}+ON^{2} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{4-a^{2}}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}a\right)^{2}+ \left(\frac{\sqrt{4-a^{2}}}{2}-a\right)^{2} $$

$$\rightarrow \frac{4-a^{2}}{4}-\frac{\sqrt{3}a\sqrt{4-a^{2}}}{2}+\frac{3}{4}a^{2}=\frac{a^{2}}{4}+\frac{4-a^{2}}{4}-a\sqrt{4-a^{2}}+a^{2} $$

$$\rightarrow \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)a\sqrt{4-a^{2}}}{2}=\frac{1}{2}a^{2} \rightarrow \left(7-4\sqrt{3}\right)\left(4-a^{2}\right)=a^{2} $$

$$\rightarrow \left(8-4\sqrt{3}\right)a^{2}=28-16\sqrt{3} \rightarrow a^{2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}×\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3} $$

$$\rightarrow a=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left(=0.5176\cdots \right)$$

