● 問題 456 解答＜三角定規＞

［設問１］

$$x^{2024}+2x^{2023}+3x^{2022}+\cdots+2024x+2025=0 \quad \cdots①$$

の 2024 個の解 a_k $(k=1,2,\cdots 2024)$ に対し，

$$M=\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{a_{2024}}\right)=\frac{(a_1-1)(a_2-1)\cdot\cdots\cdot(a_{2024}-1)}{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{2024}} \quad \cdots②$$

a_k $(k=1,2,\cdots,2024)$ から任意の $n\,(1\leqq n\leqq 2024)$ 個を選んで作った積 $(N={}_{2024}\mathrm{C}_n$ 個ある$)$ $a_{p1}a_{p2}\cdot\cdots\cdot a_{pn}$

の総和を $K(n)=\displaystyle\sum_{p=1}^{N}a_{p1}a_{p2}\cdot\cdots\cdot a_{pn}$ とすると，方程式①の解と係数の関係より $K(n)=(-1)^n(n+1)$

②より，$M=\dfrac{(-1)^n}{K(2024)}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{2024}K(n)=\dfrac{(-1)^{2n}}{K(2024)}\cdot\sum_{n=0}^{2024}(n+1)=\dfrac{1}{2025}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2025\cdot 2026=\mathbf{1013}$ $\cdots$[答]

［設問２］

$$x^{2025}-10x-4=0 \quad \cdots①$$

a_k $(k=1,2,\cdots,2025)$ は①の解だから，$a_k^{2025}=10a_k+4$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{2025}a_k^{2025}=\sum_{k=1}^{2025}(10a_k+4)=10\sum_{k=1}^{2025}a_k+8100$$

①及び解と係数の関係より $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}a_k=0$ だから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}a_k^{2025}=\mathbf{8100}$ $\cdots$[答]

［設問３］

$f(x)=x^{11}+x^4+x^3+x^2+1$ と置くと，

$f(-1)=0$ より $f(x)$ は $x+1$ を因数にもち，$f(x)=(x+1)g(x)$

$$\begin{aligned}g(x)&=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4+x^2+1\\&=x^8(x^2-x+1)-x^5(x^2-x+1)+x^2(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)\\&=(x^2-x+1)(x^8-x^5+x^2+x+1)\\&=(x^2-x+1)(x^5(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1)\\&=(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6-x^5+1)\end{aligned}$$

以上より，$f(x)=\mathbf{(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^6-x^5+1)}$ $\cdots$[答]

《追加問題》

［問題１］右図のように座標軸と各点を定める。

求める 1 辺の長さを a とすると, C 点の座標は

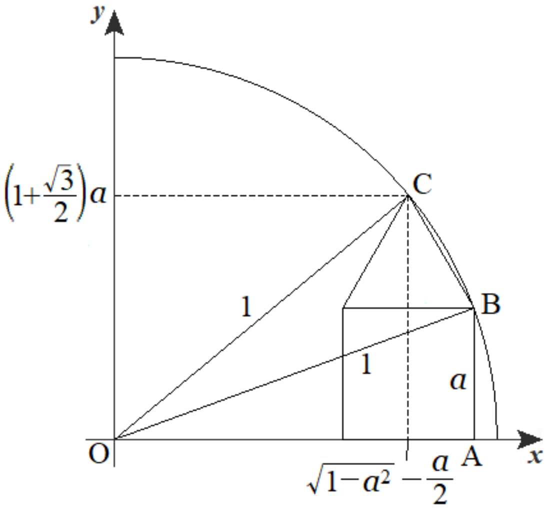
$C\left(\sqrt{1-a^2}-\dfrac{a}{2},\ \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a\right)$ で，OC＝1 だから

$$\left(\sqrt{1-a^2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2a^2=1$$

これを展開して整理すると

$$(5+2\sqrt{3})a^2=1,\ \therefore\ a^2=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$

$$\therefore\ a=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{13}}=\frac{\sqrt{65-26\sqrt{3}}}{13}\quad(=0.3437\cdots)\ \cdots[\text{答}]$$



［問題２］右図のように各点を定める。

それぞれの線分がなす角度は図のようになるから,

△OBG≡△BAF で，∠AOB＝15°

$$\therefore\ a=2\text{AF}=2\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\quad(=0.5176\cdots)\quad\cdots[\text{答}]$$