

第 457 回

次の定積分の値を求めよ。

1 問目 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

2 問目 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$

3 問目 $\int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) dx$

補題 $\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \log|\sec \theta + \tan \theta| + C$

($\because$) 左辺 $= \int \frac{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = \int \frac{d(\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta} = \log|\sec \theta + \tan \theta| + C$

1 問目 $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = I$ とおく。

$x = \tan \theta$ とおくと, $dx = \sec^2 \theta d\theta$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta}} = \frac{1}{\sec \theta}$$

x	$0 \nearrow a$
θ	$0 \nearrow \text{Arctan } a$

$$I = \int_0^{\text{Arctan } a} \frac{1}{\sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\text{Arctan } a} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = [\log|\sec \theta + \tan \theta|]_0^{\text{Arctan } a} \quad (\because \text{補題})$$

$$= \log(\sqrt{a^2+1} + a)$$

よって, $a=2$ のとき, $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \log(\sqrt{5}+2)$ 答

2 問目 $\int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = I$ とおく。

$$I = \int \sec^3 \theta = \int \sec^2 \theta \sec \theta d\theta \quad \begin{pmatrix} u' = \sec^2 \theta & v = \sec \theta \\ u = \tan \theta & v' = \sec \theta \tan \theta \end{pmatrix}$$

部分積分法により,

$$I = \tan \theta \sec \theta - \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta = \tan \theta \sec \theta - \int \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \tan \theta \sec \theta - I + \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta$$

$$= \tan \theta \sec \theta - I + \log|\sec \theta + \tan \theta| + C \quad (\because \text{補題})$$

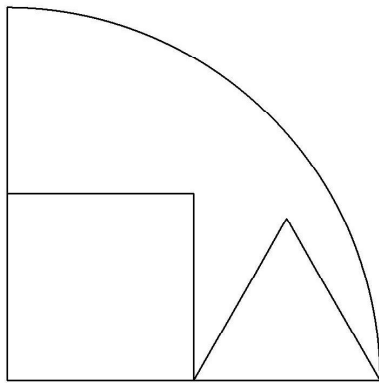
$$\therefore I = \frac{\tan \theta \sec \theta + \log|\sec \theta + \tan \theta|}{2} + \frac{C}{2}$$

したがって, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \left[\frac{\tan \theta \sec \theta + \log|\sec \theta + \tan \theta|}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}+1)}{2}$ 答

追加問題 1

半径1の四分円内に、図のように
辺の長さが等しい正方形と正三角
形が配置されている。

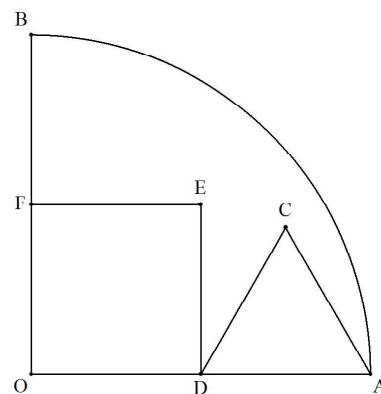
1辺の長さを求めよ。



解答 1辺の長さを a とおき、図のように記号を付ける。

$$OA = OD + DA = a + a = 2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

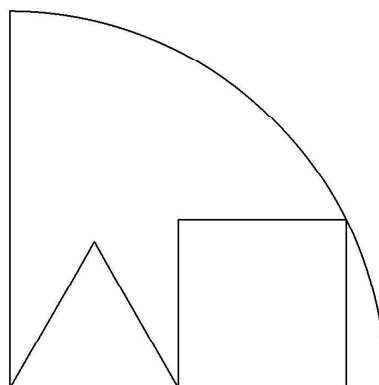
よって、求める1辺の長さは、 $\frac{1}{2}$ 圈



追加問題 2

半径1の四分円内に、図のように
辺の長さが等しい正方形と正三角
形が配置されている。

1辺の長さを求 めよ。



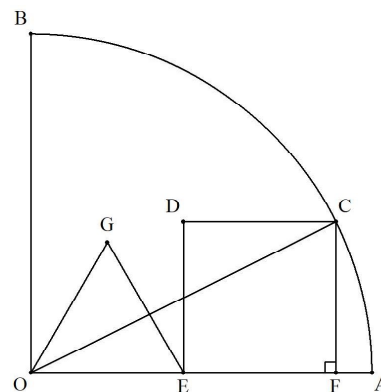
解答 1辺の長さを a とおき、図のように記号を付ける。

$\triangle COF$ について、 $OF = 2a$ 、 $FC = a$ 、 $CO = 1$ であるから、

$$\text{三平方の定理により、} (2a)^2 + a^2 = 1^2 \quad a^2 = \frac{1}{5}$$

$$a > 0 \text{ より、} a = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\approx 0.447214)$$

よって、求める1辺の長さは、 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 圈



(2025/7/20 ジョーカー)