第 457 回

次の定積分の値を求めよ。
1 問目 $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$
2 問目 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$

補題 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta = \log|sec\theta+\tan\theta|+C$

(∵) 左辺$\displaystyle=\int \frac{sec\theta(sec\theta+\tan\theta)}{sec\theta+\tan\theta}d\theta=\int \frac{d(sec\theta+\tan\theta)}{sec\theta+\tan\theta}=\log|sec\theta+\tan\theta|+C$

1 問目 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=I$ とおく。

$x=\tan\theta$ とおくと，$dx=sec^2\theta d\theta$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{sec^2\theta}}=\frac{1}{sec\theta}$$

x	$0 \nearrow a$
θ	$0 \nearrow Arc\tan a$

$\displaystyle I=\int_0^{Arc\tan a}\frac{1}{sec\theta}\cdot sec^2\theta d\theta=\int_0^{Arc\tan a}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=[\log|sec\theta+\tan\theta|]_0^{Arc\tan a}$ (∵補題)

$=\log(\sqrt{a^2+1}+a)$

よって，$a=2$ のとき，$\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\log(\sqrt{5}+2)$ 答

2 問目 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta=I$ とおく。

$\displaystyle I=\int sec^3\theta=\int sec^2\theta\, sec\theta d\theta \quad \begin{pmatrix} u'=sec^2\theta & v=sec\theta \\ u=\tan\theta & v'=sec\theta\tan\theta \end{pmatrix}$

部分積分法により，

$\displaystyle I=\tan\theta sec\theta-\int sec\theta\tan^2\theta\, d\theta=\tan\theta sec\theta-\int sec\theta(sec^2\theta-1)d\theta=\tan\theta sec\theta-I+\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta$

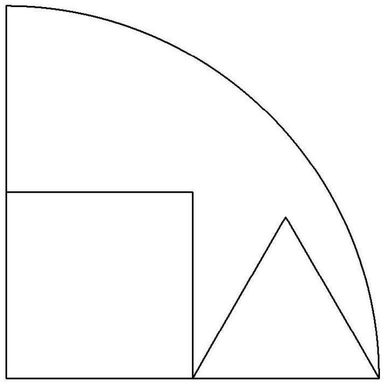
$=\tan\theta sec\theta-I+\log|sec\theta+\tan\theta|+C$ (∵補題)

$\displaystyle\therefore I=\frac{\tan\theta sec\theta+\log|sec\theta+\tan\theta|}{2}+\frac{C}{2}$

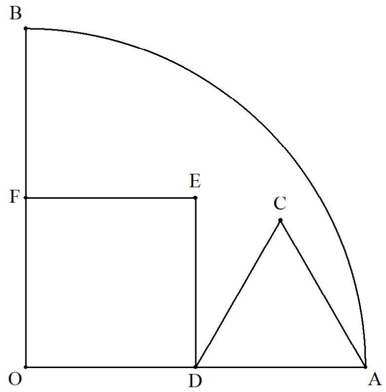
したがって，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta=\left[\frac{\tan\theta\, sec\theta+\log|sec\theta+\tan\theta|}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)}{2}$ 答

追加問題 1

半径 1 の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。
1 辺の長さを求めよ。



解答　1 辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。

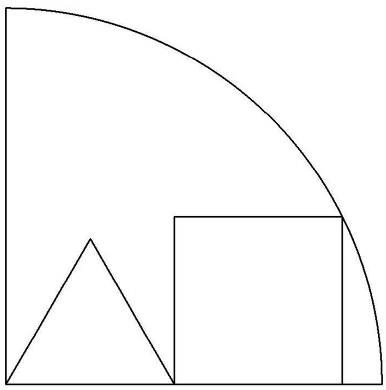


$\mathrm{OA} = \mathrm{OD} + \mathrm{DA} = a + a = 2a = 1 \quad \therefore\ a = \dfrac{1}{2}$

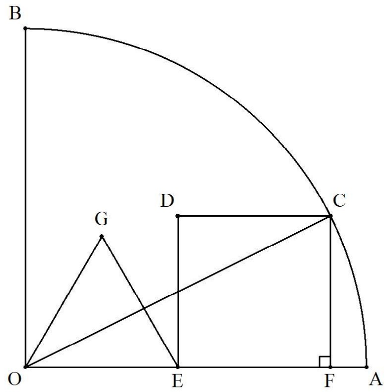
よって，求める 1 辺の長さは，$\dfrac{1}{2}$　答

追加問題 2

半径 1 の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。
1 辺の長さを求めよ。



解答　1 辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。



△COF について，$\mathrm{OF} = 2a$，$\mathrm{FC} = a$，$\mathrm{CO} = 1$ であるから，

三平方の定理により，$(2a)^2 + a^2 = 1^2 \quad a^2 = \dfrac{1}{5}$

$a > 0$ より，$a = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$　（$\fallingdotseq 0.447214$）

よって，求める 1 辺の長さは，$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　答

（2025/7/20　ジョーカー）

次の定積分の値を求めよ。

3問目　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\cos\left(x-\frac{\alpha\beta}{x}\right)dx$

解答　$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\cos\left(x-\frac{\alpha\beta}{x}\right)dx=I$ とおく。

$\dfrac{\alpha\beta}{x}=t$ とおくと，$x=\dfrac{\alpha\beta}{t}$，$dx=-\dfrac{\alpha\beta}{t^2}dt$，

x	$\alpha\to\beta$
t	$\beta\to\alpha$

$$I=\int_{\beta}^{\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\beta}{t}-t\right)\left(-\frac{\alpha\beta}{t^2}dt\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\alpha\beta}{t^2}\cos\left(t-\frac{\alpha\beta}{t}\right)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\left(-1+1+\frac{\alpha\beta}{t^2}\right)\cos\left(t-\frac{\alpha\beta}{t}\right)dt$$

$$=-I+\int_{\alpha}^{\beta}\cos\left(t-\frac{\alpha\beta}{t}\right)d\left(t-\frac{\alpha\beta}{t}\right)=-I+\left[\sin\left(t-\frac{\alpha\beta}{t}\right)\right]_{\alpha}^{\beta}=-I+\sin(\beta-\alpha)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$=-I+2\sin(\beta-\alpha)$$

$\therefore I=\sin(\beta-\alpha)$

よって，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\cos\left(x-\frac{\alpha\beta}{x}\right)dx=\sin(\beta-\alpha)$　答

(2025/7/21　ジョーカー)