第 457 回　補足

1 問目の別解

別解　まず，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$ （ただし，$a\neq 0$)を求める。

$\sqrt{a^2+x^2}+x=t$ とおくと　$t=\sqrt{a^2+x^2}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geqq 0$

ゆえに　$t>0$

$\displaystyle\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+1\right)dx=dt$ から　$\displaystyle\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=dt$

ゆえに　$\displaystyle\frac{t}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=dt$　すなわち　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\frac{1}{t}dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$

$=\log\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)+C$　(Cは積分定数)

$a=1$ のとき，これを利用すると，$\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\left[\log(\sqrt{x^2+1}+x)\right]_0^2=\log(\sqrt{5}+2)$

2 問目に関連して

$\displaystyle I_n=\int\frac{1}{\cos^n x}dx$ （n は自然数）について，

(1)　I_1 を求めよ。

(2)　I_2 を求めよ。

(3)　I_{n+2} を I_n を用いて表せ。

解答　Cは積分定数とする。

(1)　$\displaystyle I_1=\int secx dx=\int\frac{secx(secx+\tan x)}{secx+\tan x}dx=\int\frac{d(secx+\tan x)}{secx+\tan x}=\log|secx+\tan x|+C$　答

別解1

$\displaystyle I_1=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{(\sin x)'}{1+\sin x}+\frac{(\sin x)'}{1-\sin x}\right\}dx=\frac{1}{2}(\log|1+\sin x|-\log|1-\sin x|)+C$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$　答

別解2

$\displaystyle\int\frac{1}{\sin t}dt=\int\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}dt=\int\frac{\frac{1}{2}sec^2\frac{t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}dt=\int\frac{d\left(\tan\frac{t}{2}\right)}{\tan\frac{t}{2}}=\log\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C$ であるから，

$\displaystyle t=x+\frac{\pi}{2}$ とおくと，$\sin t=\cos x$　$dt=dx$ であるから，$\displaystyle I_1=\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$　答

(2)　$\displaystyle I_2=\int sec^2 x dx=\tan x+C$

(3) $I_n=\int\frac{\cos x}{\cos^{n+1}x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\cos^{n+1}x}dx=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-\int\sin x\left(\frac{1}{\cos^{n+1}x}\right)'dx$

$=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-\int\sin x\left\{-\frac{(n+1)(-\sin x)}{\cos^{n+2}x}\right\}dx=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2}x}dx$

$=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^{n+2}x}dx=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)\left(\int\frac{1}{\cos^{n+2}x}dx-\int\frac{1}{\cos^n x}dx\right)$

$=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)(I_{n+2}-I_n)$

$\therefore (n+1)I_{n+2}=nI_n+\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}$

よって，$I_{n+2}=\frac{n}{n+1}I_n+\frac{\sin x}{(n+1)\cos^{n+1}x}$　答

例1　$I_3=\frac{1}{2}I_1+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\log|secx+\tan x|+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$ より，

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3 x}dx=\left[\frac{1}{2}\log|secx+\tan x|+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}}{2}$ ■

例2　$I_5=\frac{3}{4}I_3+\frac{\sin x}{4\cos^4 x}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\log|secx+\tan x|+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}\right)+\frac{\sin x}{4\cos^4 x}$

$=\frac{3}{8}\log|secx+\tan x|+\frac{\sin x(3\cos^2 x+2)}{8\cos^4 x}+C$ より，

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^5 x}dx=\left[\frac{3}{8}\log|secx+\tan x|+\frac{\sin x(3\cos^2 x+2)}{8\cos^4 x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\log(1+\sqrt{2})+7\sqrt{2}}{8}$ ■

補足　同様に，$I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}dx$ （n は自然数）のとき，

$I_1=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$，$I_2=-cotx+C$，$I_{n+2}=\frac{n}{n+1}I_n-\frac{\cos x}{(n+1)\sin^{n+1}x}$

（2025/7/22　ジョーカー）