

問1 $1+x^2$ に着目して、定石通り、 $x = \tan \theta$ と置換すると、

$$x = \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

また、積分区間は、

x	0	→	2
θ	0	→	$\tan^{-1} 2 = \sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} = \alpha$

となりますから、

$$\text{与式} = \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^\alpha \frac{1}{\cos \theta} d\theta$$

です。ここで、

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(\sin \theta)'}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) (\sin \theta)'$$

なので、

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int_0^\alpha \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} \right) (\sin \theta)' d\theta = \frac{1}{2} [\log(1 + \sin \theta) - \log(1 - \sin \theta)]_0^\alpha \\ &= \frac{\log(1 + \sin(\alpha)) - \log(1 - \sin(\alpha))}{2} = \frac{\log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \log\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2} \\ &= \frac{\log(9 + 4\sqrt{5})}{2} = \frac{\log(2 + \sqrt{5})^2}{2} = \log(2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

となります。

問2 与式を、

$$\frac{1}{\cos^3 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

と考えます。すると、問1と同じようにやって、

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(\sin \theta)'}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) (\sin \theta)'$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right)$$

となりますから、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) (\sin \theta)' \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right)^2 (\sin \theta)' d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1 - x)^2 (1 + x)^2} dx \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\frac{1}{(1 - x)^2 (x + 1)^2} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{(1 - x)^2} + \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{(1 + x)^2} \right\}$$

なので、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{(1 - x)^2} + \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{(1 + x)^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[-\log(1 - x) + \frac{1}{1 - x} + \log(1 + x) - \frac{1}{1 + x} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\log(2\sqrt{2} + 3) + 2\sqrt{2}}{4} - 0 = \frac{\log(2\sqrt{2} + 3) + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{\log(\sqrt{2} + 1)^2 + 2\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\log(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となります。

問3 $\frac{\alpha\beta}{x} = u$ とすれば、

$$\frac{\alpha\beta}{x} = u \Rightarrow x = \frac{\alpha\beta}{u} \Rightarrow dx = -\frac{\alpha\beta}{u^2} du$$

なので、与式 = Iとおいて、

$$\begin{aligned} I &= \int_{\beta}^{\alpha} \cos\left(\frac{\alpha\beta}{u} - u\right) \left(-\frac{\alpha\beta}{u^2}\right) du = \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(u - \frac{\alpha\beta}{u}\right) \left(\frac{\alpha\beta}{u^2}\right) du = \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) \left(\frac{\alpha\beta}{x^2}\right) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) \left(1 + \frac{\alpha\beta}{x^2}\right) dx - \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) \left(1 + \frac{\alpha\beta}{x^2}\right) dx - I \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) \left(1 + \frac{\alpha\beta}{x^2}\right) dx \end{aligned}$$

となります。すると、

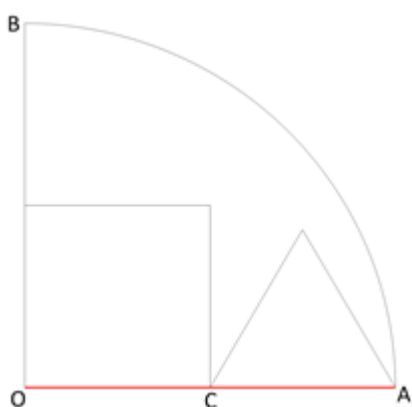
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) \left(1 + \frac{\alpha\beta}{x^2}\right) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \cos\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right) \left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right)' dx \\ &= \left[\sin\left(x - \frac{\alpha\beta}{x}\right)\right]_{\alpha}^{\beta} = 2 \sin(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

なので、

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(\beta - \alpha) = \sin(\beta - \alpha)$$

です。

追加問題1

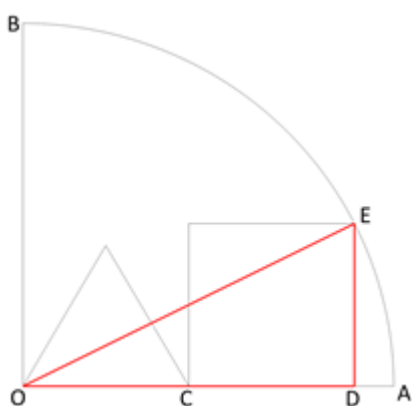


図のように、各点に記号を付けます。正方形と正三角形の一边の長さを a とすると、

$$OC + CA = OA \Rightarrow a + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

です。よって、一边の長さは $\frac{1}{2}$ です。

追加問題2



図のように、各点に記号を付けます。正方形と正三角形の一边の長さを a とし、 $\triangle ODE$ に三平方の定理を適用すると、

$$OD^2 + DE^2 = OE^2 \Rightarrow (OC + CD)^2 + DE^2 = OE^2$$

$$\Rightarrow (a + a)^2 + a^2 = 1^2 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

です。ここで、 $a > 0$ なので、一边の長さは $\frac{\sqrt{5}}{5}$ です。